



MATEMÁTICA

Volume 03





MATEMÁTICA Volume 03

Frente A

05 3 Porcentagem Autor:
Luiz Paulo

06 9 Juros simples e
compostos Autor: Luiz Paulo

Frente B

05 15 Regra de três
Autor: Paulo Vinícius
Ribeiro

06 21 Geometria de
posição e poliedros Autor:
Paulo Vinícius Ribeiro

Frente C

05 29 Função quadrática
Autor: Luiz Paulo

06 37 Função composta e

função inversa Autor: Luiz
Paulo

Frente D

05 45 Polígonos Autor:
Paulo Vinícius Ribeiro

06 51 Ângulos na
circunferência Autor: Paulo
Vinícius Ribeiro

Sumário - Matemática

Frente E 09 59 Posições relativas e
distância de ponto a reta Autor: Frederico

Reis **10 63** Áreas e teoria angular Autor:
Frederico Reis

11 67 Circunferência
Autor: Frederico Reis

12 71 Posições relativas à
circunferência Autor:

2 Coleção Estudo MATEMÁTICA

MÓDULO FRENTE Porcentagem 05 A

PORCENTAGEM EXERCÍCIO RESOLVIDO

Porcentagem, ou percentagem, é uma fração cujo

01. (PUC Minas) Certa cidade tem 18 500 eleitores.

denominador é igual a 100. Por exemplo, “sete por cento”

Na eleição para prefeito, houve 6% de abstenção

é representado como 7%, e equivale à fração $\frac{7}{100}$ entre os homens e 9% entre as mulheres; com isso, 100

o número de votantes do sexo masculino ficou exatamente

O conceito de porcentagem é um dos mais utilizados no dia a dia, como para efetuar comparações com igual ao número de votantes do sexo feminino.

valores dados. Por exemplo, vamos supor que uma Pode-se afirmar que o número de eleitores do

prestação de R\$ 500,00 irá sofrer um reajuste sexo feminino, nessa cidade, é

de 30%. Em termos matemáticos, escrevemos:

A)
7
200

30

$$30\% \text{ de } 500 = .500 = 150 \quad 100 \text{ b) } 8 \ 500$$

Assim, a nova prestação será igual a R\$ 650,00.

C)
9
250

Podemos dizer também que, ao calcularmos a porcentagem

D)
9
400

em relação a um valor dado, estamos representando uma

proporção, na qual um dos denominadores é igual a 100.

Resolução

Desse modo, no exemplo dado, dizemos que o valor de 150

representa em 500 o mesmo que o valor 30 representa sejam:

em 100.

H: Total de eleitores do sexo masculino;

150 30

= M: Total de eleitores do sexo
feminino.

$$500 \quad 100$$

$$\text{Temos } H + M = 18\,500.$$

ObsERvAção

Além disso, temos 0,94H votantes do sexo masculino e

Há três modos de representar uma porcentagem:

0,91M votantes do sexo feminino.

na forma percentual, na forma fracionária ou na forma decimal. vejamos alguns exemplos: Temos $0,94H = 0,91M$.

Portanto, devemos resolver o seguinte sistema:

Forma Forma

Forma decimal

percentual fracionária

$$\begin{array}{l} 20\% \quad 20 \left[\begin{array}{l} H \\ 100 \end{array} \right] + \begin{array}{l} M \\ 100 \end{array} = 18\,500 \quad \left| \begin{array}{l} H \\ 100 \end{array} \right| + \begin{array}{l} M \\ 100 \end{array} = 0,2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} H = 0,94 \cdot 18\,500 \\ M = 0,91 \cdot 18\,500 \end{array} \right. \\ 0,94H + 0,91M = 0 \end{array}$$

5% 0,05 substituindo $H = 18\,500 - M$ na segunda equação, temos: 5

$$100$$

$$94(18\,500 - M) - 91M = 0 \Rightarrow 1\,739\,000 - 94M - 91M = 0 \Rightarrow$$

$$1\,3\, ,$$

$$1,3\% \quad 0,013$$

$$185M = 1\,739\,000 \Rightarrow M = 9\,400$$

Editora Bernoulli **3**

Frente A Módulo 05

AUMENTOS E DESCONTOS *Resolução:*

SUCESSIVOS seja **P** o preço original dessa mercadoria. Temos:

$$\begin{aligned} &0 \\ &85 \\ &,\text{.}P \end{aligned}$$

Aumentos sucessivos Preço após a redução de 15%

$$\begin{aligned} &0\,9\,0 \\ &85\,.\,(\text{...})\,P \\ &= 0 \\ &765 \\ &,\text{.}P \end{aligned}$$

A título de exemplo, vamos imaginar que o preço de uma Preço após a redução de 10%

mercadoria seja igual a **P** reais. Qual será o novo

preço após Observe que $P - 0,765.P = 0,235.P$, o que significa que

um aumento de R\$ 10%? houve um desconto total de 23,5%.

Nesse caso, temos que 10% de $P = 0,1.P$. **Lucro**

Portanto, o novo preço será igual a $P + 0,1P = 1,1P$.

Considere um determinado produto vendido por um

Observe que o preço após o aumento também pode ser comerciante por um preço de venda V .
suponhamos que

obtido simplesmente multiplicando-se o preço anterior P esse comerciante tenha adquirido tal produto no atacado

por 1,1. Esse artifício é muito útil para solucionarmos a um preço de custo C . Definimos como lucro o valor

problemas envolvendo aumentos sucessivos.
efetivamente recebido pelo comerciante, descontado o custo

de aquisição. Em termos algébricos, temos:

Exemplo $L = v - C$

Um vendedor resolveu promover dois reajustes sucessivos Em que:

de 5% no preço de uma mercadoria. Isso equivale a

um só L: lucro por unidade vendida; aumento de

V: valor arrecadado com a venda;

A) 10%. C) 11%.

C: custo de aquisição do produto.

b) 10,25%. D) 12%.

Em muitos problemas, deseja-se saber a porcentagem

Resolução: correspondente a esse lucro, normalmente em função do

custo. Porém, em algumas situações, tal porcentagem pode

seja **P** o preço da mercadoria. A cada aumento de 5%,

ser calculada em função do preço de venda.

multiplicamos **P** por 1,05. Temos:

Exemplo

1 05 ,.P

Preço após o primeiro aumento Um comerciante obteve um lucro de 30% sobre o

Preço após o segundo aumento 1 05 1 preço de custo de um determinado produto. Qual foi a , .(, 05 .) $P = 1 10 , 2 25.P$ porcentagem do lucro sobre o preço de venda desse

mesmo

produto?

$1,1025.P - P = 0,1025.P$, o que equivale a um só aumento

de 10,25%. **Resolução:**

Descontos sucessivos sejam:

L:
lucro
por
unidade
vendida;

De maneira análoga à utilizada no caso dos aumentos **V**: preço de venda do produto;

sucessivos, vamos imaginar que o preço **P** da mercadoria sofreu

C:
preço
de
custo
do
produto.

um desconto de 30%. Qual será o preço após esse desconto?

Temos
 $L = v$
 $- C.$
(I)

Temos 30% de $P = 0,3.P$.

Mas L
=
 $0,3 C$.

O novo preço é dado por $P - 0,3.P = 0,7.P$. Portanto,
 $L = 0,3 C$.

Observe que o preço após o desconto é dado pela $0,7$ multiplicação do preço P por $0,7$.

substituindo
em
(I),
temos:

Exemplo

$L = 0,3 C$

$$L = -V \cdot L \Rightarrow +L \cdot L = V \Rightarrow L = V$$

Um eletrodoméstico teve seu preço reduzido em 15%. 3 3 3

Tendo atraído poucos compradores, o comerciante resolveu 3

$$\begin{aligned} L &= 0,3 C \\ V &\approx 0,23 \\ &= 23\% \end{aligned}$$

dar um novo desconto, dessa vez de 10%. Em relação

ao preço 13

original, qual foi o desconto total dado pelo comerciante? Portanto, o lucro é de cerca de 23% sobre o preço de venda.

4 Coleção Estudo

Porcentagem

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO 02. (FUvEsT-sP)

A cada ano que passa, o valor de um carro diminui 30% em relação ao seu valor anterior. se v for

01. o valor do carro no primeiro ano, o seu valor no oitavo (UFLA-MG–2006) Um motorista escolhe um trajeto

que sabe ser 20% maior que o trajeto que usualmente ano será

toma, pois nesse novo trajeto poderá desenvolver uma A) $(0,7)_{7v}$. D) $(0,3)_{8v}$.

velocidade média 100% maior que a do trajeto usual. b) $(0,3)_{7v}$. E) $(0,3)_{9v}$.

O tempo de viagem diminuirá s C) $(0,7)v$.

A) 40%. b) 50%. C) 100%. D) 9%. E) 20%.

03. (Unicamp-sP) Uma pessoa investiu R\$ 3 000,00 em ações.

02. (FUvEsT-sP) Um lojista sabe que, para não ter prejuízo, No primeiro mês, ela perdeu 40% do total investido, e no

o preço de venda de seus produtos deve ser no mínimo segundo mês ela recuperou 30% do que havia perdido.

44% superior ao preço de custo. Porém, ele prepara a

A) Com quantos reais ela ficou após os dois meses?

tabela de preços de venda acrescentando 80% ao preço

de custo, porque sabe que o cliente gosta de obter b) Qual foi seu prejuízo após os dois meses, em

desconto no momento da compra. Qual é o **Maior** porcentagem, sobre o valor do investimento inicial?

desconto que ele pode conceder ao cliente, sobre o preço

da tabela, de modo a não ter prejuízo? **04.** (UFPE) Um investidor resolveu empregar todo o seu

capital da seguinte forma: metade em caderneta de

A) 10% b) 15% C) 20% D) 25% E) 36%

poupança, que lhe rendeu 30% ao ano. Um terço na

03. bolsa de valores, que lhe rendeu 45% no mesmo período. (UFMG–2008) Após se fazer uma promoção em um clube

de dança, o número de frequentadores do sexo masculino O restante, ele aplicou em fundos de investimento, que lhe

aumentou de 60 para 84 e, apesar disso, o percentual renderam 24% ao ano. Ao término de um ano, o capital

da participação masculina passou de 30% para 24%. desse investidor aumentou em

Considerando-se essas informações, é **CorrEto** afirmar A) 33%. D) 32%.

que o número de mulheres que frequentam esse clube, b) 38%. E)

36%. **MATEMÁTICA** após a promoção, teve um aumento de

A) 76%. b) 81%. C) 85%. D) 90%.

04. (UFF-RJ) A confeitaria Cara Melada é conhecida por suas com o pagamento de contas telefônica e de energia **05.** (UFG–2006) Uma empresa gastava 15% de sua receita

famosas balas de leite, vendidas em pacotes. No Natal,
elétrica. Para reduzir despesas, determinou-se um corte
essa confeitaria fez a seguinte promoção: colocou, em
de 50% na conta telefônica. Essa iniciativa produziu uma
cada pacote, 20% a mais de balas e aumentou em
economia de R\$ 1 000,00, o que corresponde a 5% de
8% o preço do pacote. **DEtErMiNE** a variação, em
sua receita. Tendo em vista essas condições, **CaLCULE**
porcentagem, que essa promoção acarretou no preço de
o gasto dessa empresa com energia elétrica.
cada bala do pacote.

06. (FUvEsT-sP) Um reservatório, com 40 litros de capacidade,

05. (Mackenzie-sP) Uma pessoa pagou 20% de uma dívida.

já contém 30 litros de uma mistura gasolina / álcool com
se R\$ 4 368,00 correspondem a 35% do restante a ser
18% de álcool. Deseja-se completar o tanque com uma
pago, então a dívida total inicial era de
nova mistura gasolina / álcool de modo que a mistura
A) R\$ 10 200,00. D) R\$ 16 800,00. resultante tenha 20% de álcool.

A porcentagem de álcool

- b) R\$ 11 400,00. E) R\$ 18 100,00. nessa nova mistura deve ser de
C) R\$ 15 600,00. A) 20%. C) 24%. E) 28%.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS b) 22%. D) 26%.

07. (FUvEsT-sP) Um comerciante deu um desconto de 20%

01. (UFG) O jovem Israel trabalha em uma sapataria. Ele sobre o preço de venda de uma mercadoria e, mesmo

gasta do seu salário: 25% no pagamento do aluguel assim, conseguiu um lucro de 20% sobre o preço que

da pequena casa onde mora; 1 pagou pela mesma. se o desconto não fosse dado, seu na compra de 10 lucro, em porcentagem, seria

vale-transporte; 15% na prestação do aparelho de Tv

A) 40. C) 50. E) 60.

que adquiriu; e ainda lhe sobram R\$ 84,00. Qual é o

salário de Israel? b) 45. D) 55.

Editora Bernoulli **5**

Frente A Módulo 05

08. (UFPE) Quando o preço da unidade de determinado produto **14.** (FUvEsT-sP) sobre o preço de um carro importado incide

diminuiu 10%, o consumo aumentou 20% durante certo um imposto de importação de 30%. Em função disso, seu

período. No mesmo período, de que percentual aumentou preço para o importador é de R\$ 19 500,00. supondo

o faturamento da venda desse produto? que tal imposto passe de 30% para 60%, qual será,

A) 8% em reais, o novo preço do carro para o importador? D) 15%

b) 10% E) 30% A) R\$ 22 500,00 D) R\$ 31 200,00

C) 12% b) R\$ 24 000,00 E) R\$ 39 000,00

C)
R\$
25
350,00

09. (UFU-MG) Uma loja de artigos para presente sempre

colocou seus produtos à venda aplicando 50% a mais

15. (Mackenzie-SP) Num grupo de 200 pessoas, 80% são

sobre o preço de custo. No entanto, devido à recessão, brasileiros. O número de brasileiros que deve abandonar

ela anunciou uma liquidação com 20% de desconto sobre o grupo, para que 60% das pessoas restantes sejam

todos os produtos para pagamentos à vista. Nesse caso, brasileiras, é

o lucro da loja na venda à vista de cada produto foi de A) 90 b) 95
C) 100 D) 105 E) 110

A) 10%. C) 20%.

16. (UFES) Um empregado recebe um salário mensal para

b) 30%. D) 40%.

trabalhar 8 horas diárias. Trabalhando 2 horas extras

10. todo dia, ele tem um acréscimo de 50% em seu salário.

(UFV-MG) Uma empresa concedeu aos seus funcionários

Quanto ele ganha a mais por hora extra?

um reajuste salarial de 60% em duas etapas. Em agosto,

40% sobre o salário de julho e, em outubro, mais 20% A) 50% C) 80% E) 120%

sobre o salário de julho. Quanto este último reajuste b) 60% D) 100%

representou em relação ao salário de setembro?

11. (UFU-MG) No mês de agosto, Pedro observou que o valor

SEÇÃO ENEM

da sua conta de energia elétrica foi 50% superior ao valor

da sua conta de água. Em setembro, tanto o consumo de **01.**
(Enem-2002) A capa de uma revista de grande circulação

energia elétrica quanto o de água, na residência de Pedro, trazia a seguinte informação, relativa a uma reportagem

foram iguais aos consumos do mês de agosto. Porém, daquela edição:

como as tarifas de água e de energia elétrica foram “O brasileiro diz que é feliz na cama, mas debaixo dos

reajustadas em 10% e 20%, respectivamente, Pedro lençóis 47% não sentem vontade de fazer sexo.”

desembolsou R\$ 20,00 a mais do que em agosto para O texto a seguir, no entanto, adaptado da mesma

quitar as duas contas. Quanto Pedro pagou de energia reportagem, mostra que o dado anterior está errado:

elétrica no mês de setembro? “Outro problema predominantemente feminino é a falta

12. (Mackenzie-SP) Numa loja, para um determinado produto, vontade de ter relações. Já entre os homens, apenas de desejo: 35% das mulheres não sentem nenhuma

a diferença entre o preço de venda solicitado e o preço 12% se queixam de falta de desejo.”

de custo é 3 000. se esse produto for vendido com 20%

Considerando que o número de homens na população

de desconto, ainda assim dará um lucro de 30% à loja.

seja igual ao de mulheres, a porcentagem aproximada

Então, a soma dos preços de venda e de custo é de brasileiros que não sentem vontade de fazer sexo, de

A) 13 200 acordo com a reportagem, é

b) 14 600 A) 12%. b) 24%. C) 29%. D) 35%. E) 50%.

C) 13 600 02. (Enem-2000) O brasil, em 1997, com cerca de

D) 12 600 160 x 10⁶ habitantes, apresentou um consumo de

E) 16 400 energia da ordem de 250 000 tep (tonelada equivalente

de petróleo), proveniente de diversas fontes primárias.

13. (UEL-PR) Em uma liquidação, os preços dos artigos de uma loja O grupo com renda familiar de mais de vinte salários

são reduzidos de 20% de seu valor. Terminada a liquidação e mínimos representa 5% da população brasileira e utiliza

pretendendo voltar aos preços originais, de que porcentagem cerca de 10% da energia total consumida no país. O grupo

devem ser acrescidos os preços da liquidação? com renda familiar de até três salários mínimos representa

A) 27,5% 50% da população e consome 30% do total de energia.

Com base nessas informações, pode-se concluir que o

b) 25%

consumo médio de energia para um indivíduo do grupo de

C) 22,5% renda superior é x vezes maior do que para um indivíduo

D) 21% do grupo de renda inferior. O valor aproximado de x é

E) 20% A) 2,1 b) 3,3 C) 6,3 D) 10,5 E) 12,7

6 Coleção Estudo

Porcentagem

03. (Enem–2001) segundo um especialista em petróleo **06.** (Enem–2001) Em um colégio, 40% da arrecadação das

(*Estado de S. Paulo*, 5 mar. 2000), o consumo total de mensalidades correspondem ao pagamento dos salários

energia mundial foi estimado em 8,3 bilhões de toneladas dos seus professores. A metade dos alunos desse colégio

equivalentes de petróleo (tep) para 2001. A porcentagem é de estudantes carentes, que pagam mensalidades

das diversas fontes da energia consumida no globo é reduzidas. O diretor propôs um aumento de 5% nas

representada no gráfico. mensalidades de todos os alunos para cobrir os gastos

l gerados por reajuste de 5% na folha de pagamento dos

% da energia mundial 50 professores. A associação de pais e mestres concorda Petróleo com o aumento nas mensalidades, mas não com o índice 40 proposto. Pode-se afirmar que 30 Carvão Gás

A) o diretor fez um cálculo incorreto e o reajuste proposto 20 nas mensalidades não é suficiente para cobrir os 10 Nuclear Hidrelétrica Outros gastos adicionais. O b) o diretor fez os cálculos corretamente e o reajuste Fontes de energia

nas mensalidades que ele propôs cobrirá exatamente

segundo as informações apresentadas, para substituir os gastos adicionais.

a energia nuclear utilizada, é necessário, por exemplo, C) a associação está correta em não concordar com

aumentar a energia proveniente do gás natural em o índice proposto pelo diretor, pois a arrecadação

cerca de adicional baseada nesse índice superaria em muito

A) 10%. D) 33%. os gastos adicionais.

b) 18%. E) 50%. D) a associação, ao recusar o índice de reajuste proposto

C) 25%. pelo diretor, não levou em conta o fato de alunos

carentes pagarem mensalidades reduzidas.

04. (Enem–2001) O consumo total de energia nas residências E) o diretor deveria ter proposto um reajuste maior nas

brasileiras envolve diversas fontes, como eletricidade, gás mensalidades, baseado no fato de que a metade dos

de cozinha, lenha, etc. O gráfico mostra a evolução do alunos paga mensalidades reduzidas.

consumo de energia elétrica residencial, comparada com **07.** (Enem–2003) A eficiência de anúncios num painel

o consumo total de energia residencial, de 1970 a 1995.

MATEMÁTICA

eletrônico localizado em uma certa avenida movimentada

50 foi avaliada por uma empresa. Os resultados mostraram

a 40 que, em média:

6 30 tep) – Passam, por dia, 30 000 motoristas em frente ao
energi 20 painel eletrônico;

Consumo de (x 10 10 – 40% dos motoristas que passam
observam o painel; 0 1970 1975 1980 1985 1990 1995 –
Um mesmo motorista passa três vezes por semana
Energia total Energia elétrica pelo local.

**tep = toneladas equivalentes de petróleo*

segundo os dados anteriores, se um anúncio de um

Fonte: valores calculados através dos dados obtidos de: produto ficar
exposto durante sete dias nesse painel,

<http://infoener.iee.usp.br/1999>. é esperado que o número mínimo de
motoristas diferentes

Verifica-se que a participação percentual da energia que terão
observado o painel seja

elétrica no total de energia gasto nas residências A) 15 000 C) 42
000 E) 84 000

brasileiras cresceu entre 1970 e 1995, passando, b) 28 000 D) 71
000

aproximadamente, de

A) 10% para 40%. **08.** (Enem–2003) O tabagismo (vício em fumo)
é responsável

por uma grande quantidade de doenças e mortes prematuras

b) 10% para 60%. na atualidade. O Instituto Nacional do Câncer
divulgou

C) 20% para 60%. que 90% dos casos diagnosticados de câncer de
pulmão

D) 25% para 35%. e 80% dos casos diagnosticados de enfisema pulmonar

E) 40% para 80%. estão associados ao consumo de tabaco. Paralelamente,

foram mostrados os resultados de uma pesquisa

05. realizada em um grupo de 2 000 pessoas com doenças (Enem–2001) Nas últimas eleições presidenciais de um

determinado país, onde 9% dos eleitores votaram em de pulmão, das quais 1 500 são casos diagnosticados

branco e 11% anularam o voto, o vencedor obteve 51% de câncer, e 500 são casos diagnosticados de enfisema.

dos votos válidos. Não são considerados válidos os votos Com base nessas informações, pode-se estimar que o

em branco e nulos. Pode-se afirmar que o vencedor, número de fumantes desse grupo de 2 000 pessoas é,

de fato, obteve de todos os eleitores um percentual de aproximadamente,

votos da ordem de A) 740 C) 1 310 E) 1 750

A) 38%. b) 41%. C) 44%. D) 47%. E) 50%. b) 1 100 D) 1 620

Editora Bernoulli **7**

Frente A Módulo 05

09. (Enem–2004) Uma pesquisa sobre orçamentos familiares,

realizada recentemente pelo IbGE, mostra alguns itens

GABARITO

de despesa na distribuição de gastos de dois grupos de

famílias com rendas mensais bem diferentes. **Fixação**

despesa tipo de renda de até renda maior ou 01. A r\$ 400,00 igual a r\$ 6 000,00

02.
C

Habitação 37% 23%

03.
D

Alimentação 33% 9%

04. Redução de 10% no preço de cada bala.

Transporte 8% 17% 05. C

saúde 4% 6% **Propostos**

Educação 0,3% 5%

Outros 01. R\$ 168,00 17,7% 40%

02.
A

Considere duas famílias com rendas de R\$ 400,00 e 03. A) R\$ 2 160,00

R\$ 6 000,00, respectivamente, cujas despesas variam de acordo com os valores das faixas apresentadas. Nesse b) 28% caso, os valores, em R\$, gastos com alimentação pela 04. C família de maior renda, em relação aos da família de

menor renda, são, aproximadamente, 05. R\$ 1 000,00

A) dez vezes maiores. 06. D

b) quatro vezes maiores. 07. C

C) equivalentes. 08. A

D) três vezes menores.

09.
C

E) nove vezes menores.

10.
14,3%

10. (Enem–2005) A escolaridade dos jogadores de futebol 11. R\$ 90,00

nos grandes centros é maior do que se imagina, como

mostra a pesquisa a seguir, realizada com os jogadores 12. D

profissionais dos quatro principais clubes de futebol do 13. b

Rio de Janeiro.

14.
b

60 **Total: 112 jogadores** 15. C

54

40 16. D

20 14 16 14 14 **Seção Enem**

0 1 1

01.
b

Fundamenta incompleto incompleto incompleto 03. D
Fundamenta

O GLObo, 24 jul. 2005. 04. b

De acordo com esses dados, o percentual dos jogadores 05. b

dos quatro clubes que concluíram o Ensino Médio é de, 06. C

aproximadamente,

A) 14%. 07. b

b) 48%. 08. E

C) 54%. 09. b

D) 60%. 10. D

E) 68%.

8 Coleção Estudo MATEMÁTICA

MÓDULO FRENTE Juros simples e compostos 06 A

JUROS Juros compostos

Em um regime de juros compostos, a taxa de juros é

Chamamos de juros a remuneração pelo uso de um

calculada sobre o valor atualizado do capital,
incidindo

certo capital aplicado por um determinado período.
Por

sobre a quantia do período imediatamente anterior.

exemplo, suponhamos que uma pessoa adquira um

Essa é a modalidade de juros mais utilizada nas
transações

empréstimo no valor de R\$ 1 000,00, a ser pago em
30 dias.

comerciais.

O credor, a título de compensação pelo tempo em que
fi cará

sem o seu dinheiro, resolveu cobrar uma taxa de 5%
do valor vamos supor que uma pessoa tome
emprestada uma

total. Esse percentual é chamado de juro dessa
operação. quantia C, a uma taxa de juros compostos
de 2% ao mês,

durante três meses. Ao fi nal desse período, qual será
o valor

Há dois regimes básicos de juros: juros simples e
juros

total (montante) pago por essa pessoa?

compostos.

Nesse caso, a taxa de juros incide sobre o valor
atualizado.

Juros simples Portanto, trata-se de três aumentos sucessivos de 2%. Logo, o montante é igual a $1,02_3 \cdot C = 1,061.C$.

Em um regime de juros simples, a taxa de juros é calculada

De modo geral, o montante **M** da aplicação de um capital

apenas em relação à quantidade inicial. Por exemplo, vamos

C, a uma taxa de juros compostos **i**, por um período **t**, imaginar que uma pessoa aplique um capital **C** a uma taxa

é dado
pela
expressão:

de juros simples de 4% ao mês. Qual será o valor total que

essa pessoa possuirá ao final de cinco meses?

$$M = C \cdot (1 + i)_t$$

Temos que 4% de $C = 0,04.C$. A cada mês, a pessoa ganhará esse valor. Ao final de 5 meses, essa pessoa terá ganhado, de juros, $5 \cdot 0,04.C = 0,2C$. A quantia total Em que **i** é dada na forma decimal. que essa pessoa possui, denominada *montante*, é dada

por $C + 0,2C = 1,2C$. **EXERCÍCIOS**
RESOLVIDOS

De maneira geral, os juros simples J , obtidos em uma

aplicação de um capital C , durante um determinado período t ,

a uma taxa de juros i , são dados por: **01.** Um produto é vendido em uma loja a R\$ 200,00 à vista

ou em duas parcelas de R\$ 110,00, sendo uma parcela no



ato da compra e outra após 30 dias. se um consumidor

$$J = C.i.t$$

optar pela compra a prazo, qual será a taxa de juros

mensal cobrada pela loja?

ObsERvAçÕEs

- **Resolução:** A taxa de juros i é dada na forma decimal. Por exemplo,

se a taxa de juros é 3%, então $i = 0,03$. O preço à vista é igual a 200 reais. se subtrairmos desse

valor a entrada de 110 reais, o saldo devedor fi ca igual

- É fundamental que a taxa de juros i e o período t

estejam em unidades compatíveis. Por exemplo, se a 90 reais. Porém, após 30 dias, o consumidor irá pagar

temos uma taxa de 10% ao mês, é conveniente que 110 reais (segunda parcela). Observe que ele está

o tempo na expressão seja representado em meses.
pagando $110 - 90 = 20$ reais acima do valor devido. Esse

valor é devido aos juros, que devem ser calculados em

O montante **M** dessa aplicação é dado pela soma do capital relação ao valor fi nanciado, ou seja, 90 reais.

inicial com os juros obtidos.



90

100%

20

x



$$M = C + J$$

x

=

22,22%

02. (UFMG) Um consumidor adquiriu determinado produto **02.**
(UFJF-MG) As promoções do tipo “Leve 5 e pague 4”,

em um plano de pagamento de 12 parcelas mensais quando feitas de modo que o cliente ganhe de fato

iguais de R\$ 462,00, a uma taxa de juros de 5% ao mês. um produto, dão um desconto, sobre cada unidade

Ele pagou as 10 primeiras prestações no dia exato do vendida, de vencimento de cada uma delas. Na data do vencimento A) 6,2%. b) 10%. C) 20%. D) 25%. E) 30%.

da 11ª prestação, o consumidor decidiu quitar a última também, para liquidar sua dívida. Ele exigiu, então, que **03.** (Unifor-CE-2011) Pedro, aluno do curso de Engenharia

a última prestação fosse recalculada, para a retirada da Universidade de Fortaleza, emprestou R\$ 5 000,00 ao

dos juros correspondentes ao mês antecipado, no que seu colega de classe, Marcos, a uma taxa de juros simples

foi atendido. Depois de recalculado, o valor da última de 3% ao mês. Considerando x o número de meses do

prestação passou a ser de empréstimo e $M(x)$ o montante a ser devolvido para

A) R\$ 438,90. Pedro, no final do empréstimo, podemos afirmar que a

b) R\$ 441,10. representação gráfica que **MELHOR** representa $M(x)$ é

C) R\$ 440,00.

$M(x)$

D) R\$ 444,00.

Resolução: A)

Desejamos retirar os juros referentes à última parcela.

Observe que cada parcela teve seu valor original x aumentado em 5%. seja P a parcela sem juros.

Temos: $M(x)$

$$1\,05\,462 \text{ b) } , . P = 462 \Rightarrow = P = 440 \text{ reais } 1\,05\,5\,000$$

03. x (UFMT) Uma financiadora oferece empréstimo por um período de 4 meses, sob as seguintes condições:

I) Taxa de 11,4% ao mês, a juros simples;

$M(x)$

II) Taxa de 10% ao mês, a juros compostos. C)

5
000

Uma pessoa fez um empréstimo de R\$ 10 000,00 optando pela condição I. Em quantos reais os juros cobrados x pela condição I serão menores do que os cobrados pela condição II?

5
000

Resolução:

D)

Juros cobrados na condição I:

$M(x)$

$$J = 10\,000 \cdot 0,114 \cdot 4 = 4\,560 \text{ reais}$$

Juros cobrados na condição II:

$$M = 10\,000 \cdot (1 + 0,1)_4 = 10\,000 \cdot 1,4641 = 14\,641$$

$$J = 14\,641 - 10\,000 = 4\,641 \text{ reais}$$

A diferença é dada por $4\,641 - 4\,560 = 81\,500 \text{ M(x) E}$

Portanto, os juros da condição I serão menores em x

R\$ 81,00.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO 04. (FGV-2010)

No início do ano 2000, Alberto aplicou certa

quantia a juros compostos, ganhando 20% ao ano.

No início de 2009, seu montante era de R\$ 5 160,00.

01. se ele deixar o dinheiro aplicado, nas mesmas condições, (UFOP-MG-2009) Uma loja vende seus produtos com duas

opções de pagamento: à vista, com 10% de desconto, ou o juro recebido entre o início de 2010 e o início de 2011

em duas prestações mensais iguais sem desconto, sendo será, aproximadamente, de

a primeira paga no ato da compra. Dessa forma, a taxa A) R\$ 1 032,00. D) R\$ 1 135,00.

mensal de juros embutida na venda a prazo é de b) R\$ 1 341,00. E) R\$ 929,99.

A) 5%. b) 10%. C) 20%. D) 25%. C) R\$ 1 238,00.

Juros simples e compostos

05. (Unicamp-SP) suponha que todos os preços venham **05.**
(Unimontes-MG-2010) A sapataria “Pé bonito” está

subindo 30% ao mês nos últimos meses, e continuem dando 20% de desconto na compra à vista e, na compra

nos próximos meses. **Calcule:** com cheque para 30 dias, preço normal, sem juros.

A) Quanto custará, daqui a 60 dias, um objeto que hoje se o cliente escolher fazer o pagamento com cheque para

custa R\$ 27 300,00? 30 dias, estará, na verdade, pagando juros de

b) Quanto custava esse mesmo objeto há um mês? A) 25%. C) 24%.

b) 20%. D) 0%.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 06. (FJP-MG-2010) João contratou um empréstimo no valor

de R\$ 8 000,00 que deverá ser pago em duas parcelas.

01. (UNESP) As promoções do tipo “Leve 3 e pague 2”, A primeira parcela, no valor de R\$ 5 512,50, deverá ser

comuns no comércio, acenam com um desconto, sobre paga em 60 dias. A segunda parcela deverá ser paga

cada unidade vendida, de em 90 dias. se a taxa de juros contratada foi de 5% ao

A) 50 mês, com capitalização mensal, então o valor da segunda

3 % . D) 30%. parcela deverá ser

b) 20%. E) 100 A) R\$ 2 879,59. % . 3 b) R\$ 3 450,00.

C) 25%. C) R\$ 3 459,71.

D)
R\$
3
472,87.

02. (UFMG–2009) No período de um ano, certa aplicação

financeira obteve um rendimento de 26%. No mesmo **07.** (UNESP–2010) Desejo ter, para minha aposentadoria,

período, porém, ocorreu uma inflação de 20%. Então, 1 milhão de reais. Para isso, faço uma aplicação financeira,

é **CorrEto** que o rendimento efetivo da referida que rende 1% de juros ao mês, já descontados o imposto

aplicação foi de de renda e as taxas bancárias recorrentes. se desejo me

A) 3%. aposentar após 30 anos com aplicações mensais fixas e

b) 5%. ininterruptas nesse investimento, o valor aproximado, em

MATEMÁTICA

C) 5,2%. reais, que devo disponibilizar mensalmente é

D) 6%. Dado: $1,01_{361} \approx 36$

A) 290,00 D) 278,00

03. (CEFET-MG–2011) Num consórcio de 30 mil reais, a ser b) 286,00 E) 274,00

pago em 25 prestações mensais fixas e sem juros, uma

C)
282,00

pessoa oferecerá como lance inicial um valor que será abatido dos 30 mil reais. Essa quantia inicial, emprestada **08.** (UFPE–2009) Uma loja vende uma televisão em duas

por seu irmão, deverá ser devolvida em parcelas fixas prestações; a primeira, de R\$ 1 650,00, a ser paga um durante os mesmos 25 meses, com taxa de 25% sobre mês após a compra, e a segunda, de R\$ 1 815,00, a ser o empréstimo. Para que a prestação total, a ser paga paga dois meses após a compra. se a loja cobra juros por essa pessoa, não ultrapasse R\$ 1 300 mensais, ela mensais cumulativos de 10% ao mês, qual o preço da poderá dar como lance o percentual **Máximo** do valor televisão à vista?

do consórcio de, aproximadamente,

A) R\$ 3 000,00

A) 17%.

b) R\$ 3 100,00

b) 26%.

C)
R\$
3
200,00

C) 33%.

D)

R\$
3
300,00

D) 42%.

E)
R\$
3
400,00

E) 54%.

04. (FUvEsT-sP-2011) Uma geladeira é vendida em **n** parcelas tempo atrás, por 80% do seu valor atual. Qual o aumento **09.** (UFPE-2009) Um produto podia ser comprado, há algum

iguais, sem juros. Caso se queira adquirir o produto,
percentual sofrido pelo preço do produto neste período
pagando-se 3 ou 5 parcelas a menos, ainda sem juros,

de
tempo?

o valor de cada parcela deve ser acrescido de R\$ 60,00
ou de R\$ 125,00, respectivamente. Com base nessas A) 20% D) 25%
informações, conclui-se que o valor de **n** é igual a b) 23% E) 28%
A) 13 b) 14 C) 15 D) 16 E) 17 C) 24%

Editora Bernoulli **11**

Frente A Módulo 06

10. (FGV-sP-2009) Roberto estima que, daqui a dois anos, **13.**
(UFsJ-MG-2008) A partir de dados econômicos divulgados

o preço de um carro seja R\$ 46 200,00. Para poder na imprensa no dia 20 de julho de 2007, admite-se que,

comprar o carro à vista, daqui a dois anos, ele deposita nos últimos 12 meses, o rendimento médio de aplicações

hoje x reais e depositará mais x reais daqui a um ano, na bolsa de valores de São Paulo, a IbOvEsPA, foi de

num fundo que rende 10% ao ano a juros compostos, de 17,3%, e que o rendimento da caderneta de poupança,

modo que tenha exatamente esse valor (R\$ 46 200,00) no mesmo período, foi de 3,3%. Um certo investidor

daqui a dois anos. O valor de x é um número cuja soma aplicou R\$ 1 000,00 na bolsa e este mesmo valor na

dos algarismos da parte inteira é igual a caderneta de poupança, durante um período de dois anos.

A) 5 b) 4 C) 2 D) 3 E) 6 sob o regime anual de juros compostos, considerando-se

11. que essas instituições não fazem arredondamento dos

(CEFET-MG-2009) O COPOM (Comitê de Política Monetária

rendimentos e não se levando em conta outros fatores, a

do Banco Central) anunciou nesta quarta-feira uma nova

diferença de rendimentos nessas duas aplicações, ao final

redução na taxa básica de juros, a Selic, que caiu de

do período de aplicação, em reais, será igual a

11,25% aa para 10,25% aa, o menor patamar da história.

Trata-se da terceira redução seguida da taxa básica, que

estava em 13,75% aa em janeiro de 2009. b) 308,84

Disponível em:

dinheiro/ult91u558077.shtml > . D)
280

Acesso em: 29 abr. 2009 (Adaptação).

Duas pessoas aplicaram R\$ 10 000,00 em um investimento **14**. (FJP-MG-2008) Dois capitais, C_1 e C_2 , foram aplicados no

com capitalização composta, taxa de juros selic e tempo mesmo dia e à mesma taxa de 5% ao mês, com os juros

de 1 ano. Ana fez a aplicação em janeiro de 2009, capitalizados (isto é, somados ao capital) mensalmente.

e Pedro, em maio de 2009. Ao final de cada investimento, Os montantes, obtidos ao final de 3 e 4 meses,

é **CorrEto** afirmar que respectivamente, foram iguais. A soma desses capitais,

A) Pedro teve montante 2,5% maior que o de Ana. sabendo-se que a diferença entre eles é de R\$ 1 000,00,

b) Ana recebeu um montante 4% maior que o de Pedro. A) é menor que R\$ 16 000,00.

C) a soma dos montantes de Pedro e Ana supera b) está entre R\$ 16 000,00 e R\$ 27 600,00.

R\$ 25 000,00. C) está entre R\$ 27 600,00 e R\$ 32 400,00.

D) a diferença entre os dois montantes foi de 3,5% do D) é maior que R\$ 32 400,00.

valor aplicado individualmente.

E) a diferença entre os valores recebidos por Ana e

Pedro 15. (Unifor-CE–2008) Um capital de R\$ 250 000,00 foi
foi de R\$ 100,00 a favor de Ana.

aplicado em um regime de capitalização composta e ao

12. (FUvEsT–2008) No próximo dia 08/12, Maria, que vive final de 2
anos foi retirado o montante de R\$ 518 400,00.

em Portugal, terá um saldo de 2 300 euros em sua A taxa anual
dessa aplicação foi de

conta corrente, e uma prestação a pagar no valor de A) 44%.

3 500 euros, com vencimento nesse dia. O salário dela é b) 42,5%.

suficiente para saldar tal prestação, mas será depositado

C)
42%.

nessa conta corrente apenas no dia 10/12. Maria está

D)
40,5%.

considerando duas opções para pagar a prestação:

E)
40%.

1. Pagar no dia 8. Nesse caso, o banco cobrará juros de

2% ao dia sobre o saldo negativo diário em sua conta

corrente, por dois dias; **16.** (FGV-sP–2008) João divide
suas economias e as aplica

em dois fundos: **a** e **B**. No primeiro mês, o fundo **a**

2. Pagar no dia 10. Nesse caso, ela deverá pagar uma

multa de 2% sobre o valor total da prestação. rendeu 50%
e o fundo **B**, 30%. No segundo mês, ambos

renderam 20%. se a rentabilidade que João obteve no

suponha que não haja outras movimentações em sua bimestre foi de 63,2%, que porcentagem de sua economia

conta corrente. se Maria escolher a opção 2, ela terá,

foi
aplicada
no
fundo
B?

em relação à opção 1,

A)
50%

A) desvantagem de 22,50 euros.

b) vantagem de 22,50 euros. b) 60%

C) desvantagem de 21,52 euros. C) 40%

D) vantagem de 21,52 euros. D) 70%

E) vantagem de 20,48 euros. E) 30%

12 Coleção Estudo

Juros simples e compostos

17. (FGV-sP–2008) Certo automóvel vale hoje \$ 10 000,00 **21.**
(Unimontes-MG–2009) Dois irmãos fizeram juntos uma

e seu valor diminui 20% por ano. Carlos tem hoje uma aplicação, a uma taxa de 2% ao mês (juros simples).

poupança de \$ 5 000,00 aplicada com um rendimento O mais velho aplicou R\$ 1 000,00 a mais que o mais novo.

de 10% ao ano. Quanto faltará para Carlos comprar esse Ao final de um ano, resgataram R\$ 7 200,00. A quantia

mesmo automóvel daqui a dois anos? que o irmão mais novo aplicou foi de

A) \$ 2 000,00 A) R\$ 3 100,00.

b) \$ 1 000,00 b) R\$ 2 500,13.

C)
R\$
2
413,23.

C) \$ 0,00

D)
R\$
2
403,23.

D) \$ 700,00

E) \$ 350,00 **22.** (Unimontes-MG–2009) João aplicou R\$ 520,00 a

juros simples de 3% ao mês. seu irmão aplicou

18. R\$ 450,00 a uma outra taxa. Ao final do 6º mês, ambos (FGv-sP–2008) João comprou uma geladeira e pagou em

duas parcelas iguais de \$ 525,00. A primeira parcela foi atingiram o mesmo montante. A taxa mensal de juros

paga à vista e a segunda, após um mês. sabendo que (simples) aplicada ao dinheiro do irmão de João foi de,

a loja cobra juros de 5% ao mês sobre o saldo devedor, aproximadamente,

o preço da geladeira à vista era A) 6% ao mês.

A) \$ 1 010,00. b) 5% ao mês.

C)
4%
ao
mês.

b) \$ 1 025,00.

D) 3,5% ao mês.

C) \$ 1 015,00.

D) \$ 1 050,00. **23.** (UNIFEsP–2006) André aplicou parte de seus

E) \$ 1 020,00. R\$ 10 000,00 a 1,6% ao mês, e o restante a 2% ao mês.

No final de um mês, recebeu um total de R\$ 194,00 de

19. juros das duas aplicações. O valor absoluto da diferença (FGV-sP–2009) Ao investir todo mês o montante de **MATEMÁTICA** entre os valores aplicados a 1,6% e a 2% é R\$ 1 200,00 em uma aplicação financeira, o investidor

notou que imediatamente após o terceiro depósito, seu A) R\$ 4 000,00.

montante total era de R\$ 3 900,00. A taxa mensal de b) R\$ 5 000,00.

juros dessa aplicação, em regime de juros compostos, é C) R\$ 6 000,00.

A) 2 D) R\$ 7 000,00. – 3

5 E) R\$ 8 000,00.

b) 2 – 3 **24.** (FUvEsT-sP–2009) Há um ano, Bruno comprou uma 4

casa por R\$ 50 000,00. Para isso, tomou empréstados

C) 10 3 – R\$ 10 000,00 de Edson e R\$ 10 000,00 de Carlos,

2 prometendo devolver-lhes o dinheiro, após um ano,

D) 11 3 acrescido de 5% e 4% de juros, respectivamente. A casa –

3 valorizou 3% durante esse período de um ano. sabendo-se

que bruno vendeu a casa hoje e pagou o combinado a

E) 2 3 3 – Edson e a Carlos, o seu lucro foi de

2

A) R\$ 400,00. D) R\$ 700,00.

b) R\$ 500,00. E) R\$ 800,00.

20. (Unimontes-MG–2009) Uma mercadoria, que custa

C)

R\$

600,00.

R\$ 50,00 à vista, é adquirida a prazo, com uma entrada

de R\$ 30,00 mais uma parcela de R\$ 25,00 com 30 dias de **25.** (UFRJ) A rede de lojas sistrepa vende por crediário com

prazo. A taxa de juros mensal, cobrada nessa operação, é de uma taxa de juros mensal de 10%. Uma certa mercadoria,

A) 20%. cujo preço à vista é P, será vendida a prazo de acordo com

b) 15%. o seguinte plano de pagamento: R\$ 100,00 de entrada,

uma prestação de R\$ 240,00 a ser paga em 30 dias e outra

C) 25%. de R\$ 220,00 a ser paga em 60 dias. **DEtErMiNE P,**

D) 10%. o valor de venda à vista dessa mercadoria.

Editora Bernoulli **13**

Frente A Módulo 06

SEÇÃO ENEM

GABARITO

01. (Enem–2009) João deve 12 parcelas de R\$ 150,00,

Fixação

referentes ao cheque especial de seu banco, e cinco

parcelas de R\$ 80,00, referentes ao cartão de crédito. 01. D

O gerente do banco lhe ofereceu duas parcelas de 02. C

desconto no cheque especial, caso João quitasse essa 03. b

dívida imediatamente ou, na mesma condição, isto é,

04.
C

quitação imediata, com 25% de desconto na dívida do

05.
A)
R\$
46
137,00

cartão. João também poderia renegociar suas dívidas

em 18 parcelas mensais de R\$ 125,00. sabendo desses b) R\$ 21
000,00

termos, José, amigo de João, ofereceu-lhe emprestar o

Propostos

dinheiro que julgasse necessário pelo tempo de 18 meses,
com juros de 25% sobre o total emprestado. A alternativa 01. E
que dá a João o menor gasto é 02. b

A) renegociar suas dívidas com o banco. 03. C

04.

A

b) pegar emprestado de José o dinheiro referente à
quitação das duas dívidas. 05. A

06.

D

C) recusar o empréstimo de José e pagar todas as
parcelas pendentes nos devidos prazos. 07. b

08.

A

D) pegar emprestado de José o dinheiro referente à
quitação do cheque especial e pagar as parcelas do 09. D
cartão de crédito. 10. C

E) pegar emprestado de José o dinheiro referente à 11. D
quitação do cartão de crédito e pagar as parcelas do 12. C
cheque especial. 13. b

14.

D

02. (Enem–2000) João deseja comprar um carro cujo 15. A

preço à vista, com todos os descontos possíveis, é de

16.

D

R\$ 21 000,00, e esse valor não será reajustado nos

17.

E

próximos meses. Ele tem R\$ 20 000,00, que podem ser

18

b

aplicados a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês,

e escolhe deixar todo o seu dinheiro aplicado até que o 19. C

montante atinja o valor do carro. Para ter o carro, João 20. C

deverá esperar 21. D

A) dois meses, e terá a quantia exata. 22. A

23.

D

b) três meses, e terá a quantia exata.

24.

C

C) três meses, e ainda sobrarão, aproximadamente,

25.

P

=

R\$

500,00

R\$ 225,00.

D) quatro meses, e terá a quantia exata.

Seção Enem

E) quatro meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, 01. E 02. C

R\$ 430,00.

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Regra de três 05 B

REGRA DE TRÊS SIMPLES Exemplo

Abrindo completamente 6 torneiras, enche-se um tanque

Essa regra é aplicada quando temos apenas duas grandezas com água em 22 minutos. se abrirmos apenas 4 torneiras,

envolvidas (direta ou inversamente proporcionais), em quanto tempo o tanque ficará cheio? e queremos relacionar dois valores correspondentes de

Resolução

cada grandeza. são conhecidos três dos quatro valores e

o outro valor é, então, determinado através dessa regra. Quanto menor o número de torneiras abertas, menor

Temos, assim, duas possibilidades: será a vazão de água e, conseqüentemente, mais tempo

será gasto para encher o tanque. Logo, o número de

i) se a e b são diretamente proporcionais a a e b , _{1 2 1 2}

torneiras abertas e o tempo são grandezas inversamente

então: proporcionais. Assim:

Grandeza a Grandeza b

Número de

a torneiras tempo

$\frac{1}{a_1} \cdot b_1$

$\frac{1}{a_2} \cdot b_2$

$\frac{1}{6} \cdot 22$

Exemplo $\frac{1}{4} \cdot x_1 = \frac{1}{6} \cdot 22 \Rightarrow x = 33$ minutos

Considerando que em um festival cada 5 pessoas
Portanto, com 4 torneiras, o tanque ficará cheio após

ocupavam uma área de 2 m_2 , quantas pessoas estavam
33 minutos. presentes em toda a área de 800 m_2 de
festival?

Resolução: REGRA DE TRÊS COMPOSTA

Quanto maior o número de pessoas no festival,
maior o

espaço ocupado por todas elas. Logo, o número de
pessoas e a

área ocupada são grandezas diretamente proporcionais. Assim: Essa regra é aplicada quando são envolvidas mais de

duas grandezas. Podemos analisar como se relacionam duas

Número de dessas grandezas fixando as demais. área ocupada pessoas

Exemplo

5 2

x se 4 operários constroem um muro de 30 m de 800 comprimento em 10 dias, trabalhando 8 horas por dia,

5 2 quantas horas por dia deverão trabalhar 6 operários para = $\Leftrightarrow$

x = 2 000 pessoas

x 800 construir 45 m do mesmo muro em 8 dias?

Logo, estavam presentes no festival 2 000 pessoas.

Resolução:

ii) se a e a são inversamente proporcionais a b e b ,₁
_{2 1 2} sendo x o número de horas, por dia, trabalhadas pelos

então: 6 operários, temos:

Grandeza a Grandeza b

a B C D

a Número de Comprimento Número de
 Número de b_1 a operários do muro dias horas
 por dia b_2

$$a \cdot b_4 \cdot 30 \cdot 10 \cdot 8_1 = 2 \cdot 6 \cdot 45 \cdot 8 \times a \cdot b_{21}$$

Editora Bernoulli 15

Frente B Módulo 05

vamos determinar o valor faltante da grandeza **D**, que

03. (UFMs–2008) Numa fábrica de tecidos, quatro rolos

depende dos valores das grandezas **a**, **B** e **C**. cilíndricos de metal estão dispostos sequencialmente

Fixando **a** e **C**, **D** é diretamente proporcional a **B**,
 pois como um conjunto de engrenagens conectadas, veja

quanto maior o número de horas trabalhadas por dia,
 maior a fi gura a seguir. Sabe-se que o diâmetro do primeiro

será o comprimento do muro construído (na mesma
 razão, rolo mede 1,6 metros; do segundo, 50 centímetros;

por exemplo, se dobrarmos uma grandeza, a outra
 também do terceiro, 2 metros; e o quarto rolo tem raio medindo

dobrará). 10 centímetros. Estando o sistema já em funcionamento,

e sabendo-se que o quarto rolo dá 10 voltas completas

Fixando **B** e **C**, **D** é inversamente proporcional a **a**,
 pois

por minuto, quantas voltas completas o primeiro rolo dará
quanto maior o número de horas trabalhadas por dia,
em 12 horas seguidas de funcionamento?

menor será o número de operários necessários à
construção

(em uma razão inversa, por exemplo, se dobrarmos
uma tecido grandeza, a outra cairá pela metade).

entrada saída

Fixando **a** e **B**, **D** é inversamente proporcional a **C**,
pois

quanto maior o número de horas trabalhadas por dia,
menor

será o número de dias necessários à construção (em
uma

razão inversa). A) 7 200 D) 480

B b) 900 E) 450

Então, **D** é proporcional a , e podemos montar a

AC

C)
720

seguinte proporção a partir do produto das razões dos
valores conhecidos, observando o mesmo sentido das
setas **04**. (PUC-sP-2009) Toda energia necessária para o
mostradas anteriormente: consumo na Terra provém de fonte
natural ou sintética.

x 10 4 45 h Ultimamente, tem havido muito interesse em aproveitar

= . . $\Leftrightarrow$ = x 10

8 8 6 30 dia a energia solar, sob a forma de radiação eletromagnética,

para suprir ou substituir outras fontes de potência.

Portanto, cada um dos operários deverá trabalhar

sabe-se que células solares podem converter a energia

10 horas por dia.

solar em energia elétrica e que para cada centímetro

quadrado de célula solar, que recebe diretamente a

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO luz do sol, é gerado 0,01 watt de potência elétrica. Considere que a malha quadriculada a seguir representa

um painel que tem parte de sua superfície revestida por

01. (UFPE–2009) se treze datilógrafos, de mesma capacidade, 9 células solares octogonais, todas feitas de um mesmo

digitam treze mil e treze símbolos em treze minutos, material. se, quando a luz do sol incide diretamente

quantos símbolos são digitados por cada um deles em sobre tais células, elas são capazes de, em conjunto,

um minuto? gerar 50 400 watts de potência elétrica, então a área, em

A) metros quadrados, da superfície do painel não ocupada 77 D) 59

pelas
células

b) 71 E) 55

C) 65

02. (UFMG) Um mapa está desenhado em uma escala em que 2 cm correspondem a 5 km. Uma região assinalada nesse mapa tem a forma de um quadrado de 3 cm de lado. A área real dessa região é de

A) 37,50 km².

b) 56,25 km². A) 144 D) 432

C) 67,50 km². b) 189 E) 648

D) 22,50 km². C) 192

16 Coleção Estudo

Regra de três

05. (UFRRJ-2008) A decomposição de uma determinada **03.**
(UFMT-2009) Leia o texto.

substância é inversamente proporcional ao tempo.

O gráfico da figura foi construído com a massa da **Você sabia?**

substância expressa em gramas, e o tempo, em anos.

m (g)

30

25

20

15

10

5 O dióxido de carbono (CO_2) é inodoro, incolor e sufocante. Um caminhão movido a diesel, que circule 100 quilômetros

O Para cada tonelada dessa por dia (de segunda a sexta-feira), cujo consumo substância emitida no ar,

O tempo necessário para que essa substância se reduza é preciso plantar de 3 a 5 de 10 km/L, libera 6

a 2,5 gramas é de árvores. toneladas de CO_2 por ano.

A) 60 anos.

b) 80 anos.

C) 120 anos.



D) 160 anos.



E) 240 anos.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Um carro de passeio movido a Cada pessoa gera em média

MATEMÁTICA álcool, nas mesmas condições 2,7 tonelada por mês de CO_2 ,



do caminhão movido a diesel, decorrentes do consumo de



01. (UFMG) No ano passado, uma equipe de 13 professores, produz 3 toneladas de CO_2 energia, água, produção de



com um ritmo de trabalho suposto constante, corrigiu anualmente. lixo, entre outras atividades.

3 000 provas em 6 dias. Este ano, o número de provas

AQUECIMENTO GLOBAL, ano 1 – nº 5. p. 43.

aumentou para 5 500 e a equipe foi ampliada para

15 professores. Para se obter uma estimativa do número n A partir das informações contidas no texto, analise as

de dias necessários para totalizar a correção, suponha que, afirmativas.

durante todo o período de correção, o ritmo de trabalho I. se o carro de passeio deixar de rodar 1 dia (de 2ª à

da equipe deste ano será o mesmo da equipe do ano 6ª feira), durante um ano, deixará de emitir 600 kg

passado. O número n satisfaz a condição de CO_2 .

A) $n \leq 8$ II. A quantidade mínima de árvores a ser plantada para C)
 $10 < n \leq 12$

compensar a emissão de CO₂ gerada por uma família

B) $8 < n \leq 10$ D) $n > 12$

de 4 pessoas, durante um mês, é superior a 100.

02. III. A quantidade mínima de árvores a ser plantada para

(UNESP) Os dados publicados na revista *Veja* de

compensar a emissão de CO₂ do caminhão, durante

12/4/2000 mostram que, de cada 100 pessoas com o

um mês, é igual a 18.

Ensino Médio, apenas 54 conseguem emprego. se num

determinado grupo de 3 000 pessoas, 25% têm Ensino Iv. Em um
ano, a quantidade, em média, de CO₂ gerada

por uma pessoa equivale à quantidade gerada por

Médio, o número provável de pessoas do grupo, com

aproximadamente 11 carros de passeio.

Ensino Médio, que, de acordo com os dados da pesquisa,

irão conseguir emprego é Estão **CorrEtas** as afirmativas

A) 375 D) 750 A) I, II e III, apenas. D) I, II, III e Iv.

b) 405 E) 1 620 b) II e III, apenas. E) I e Iv, apenas

C) 450 C) II e Iv, apenas.

Frente B Módulo 05

04. (UERJ) Dois viajantes partem, simultaneamente, de um **08.**
(PUC Rio–2008) Um festival foi realizado num campo de

mesmo ponto e caminham para uma cidade a 90 km de 240 m por 45 m. sabendo que por cada 2 m² havia, em

distância desse ponto. O primeiro viajante percorre, por média, 7 pessoas, quantas pessoas havia no festival?

hora, 1 km a mais do que o segundo viajante e chega A) 42 007 D) 24 045

à cidade de destino uma hora antes dele. A velocidade,

b) 41 932 E) 10 000

em km/h, do primeiro viajante é igual a

C)
37
800

A) 7 C) 9

b) 8 D) 10 **09.** (Mackenzie-sP–2006) Na construção de um dique, foram

utilizadas 90 toneladas de terra, acondicionadas em sacos

05. (PUC-sP–2006) Às 8 horas de certo dia, um tanque, plásticos de 5 litros. Considerando que cada cm³ de terra

cuja capacidade é de 2 000 litros, estava cheio de água; pesa 3 gramas, a **MENor** quantidade necessária de sacos

entretanto, um furo na base desse tanque fez com que para a construção do dique foi de

a água por ele escoasse a uma vazão constante. se às

A) 4 000 D) 9 000

14 horas desse mesmo dia o tanque estava com apenas

b) 6 000 E) 10 000

1 760 litros, então a água em seu interior se reduziu à

metade às C) 8 000

A) 21 horas do mesmo dia. **10.** (UFPE–2007) se, em uma fábrica de automóveis,

b) 23 horas do mesmo dia. 12 robôs idênticos fazem uma montagem em 21 horas, em

C) 4 horas do dia seguinte. quantas horas 9 desses robôs realizam a mesma tarefa?

D) 8 horas do dia seguinte. A) 23 horas

E) 9 horas do dia seguinte. b) 24 horas

C)
25
horas

06. (UFPE) Uma obra será executada por 13 operários D) 26 horas

(de mesma capacidade de trabalho), trabalhando E) 28 horas

durante 11 dias com jornada de trabalho de 6 horas

por dia. Decorridos 8 dias do início da obra, 3 operários

adoeceram, e a obra deverá ser concluída pelos operários

SEÇÃO ENEM

restantes no prazo estabelecido anteriormente. Qual

deverá ser a jornada diária de trabalho dos operários

01. (Enem–2009) Uma cooperativa de colheita propôs a um

restantes nos dias que faltam para a conclusão da obra

fazendeiro um contrato de trabalho nos seguintes termos:
no prazo previsto?

a cooperativa forneceria 12 trabalhadores e 4 máquinas,

A) 7 h 42 min

em um regime de trabalho de 6 horas diárias, capazes de

b) 7 h 44 min colher 20 hectares de milho por dia, ao custo de R\$ 10,00

C) 7 h 46 min por trabalhador por dia de trabalho e R\$ 1 000,00 pelo

D) 7 h 48 min aluguel diário de cada máquina. O fazendeiro argumentou

que fecharia contrato se a cooperativa colhesse

E) 7 h 50 min

180 hectares de milho em 6 dias, com gasto inferior a

07. R\$ 25 000,00. Para atender às exigências do fazendeiro

(Mackenzie-SP–2007) se 6 pessoas, trabalhando 4 horas

por dia, realizam um trabalho em 15 dias, 8 pessoas, e supondo que o ritmo dos trabalhadores e das máquinas

trabalhando 6 horas por dia, farão o mesmo trabalho em seja constante, a cooperativa deveria

A) 42 horas. A) manter sua proposta.

b) oferecer 4 máquinas a mais.

b) 45 horas.

C) oferecer 6 trabalhadores a mais.

C) 48 horas.

D) aumentar a jornada de trabalho para 9 horas diárias.

D) 50 horas.

E) reduzir em R\$ 400,00 o valor do aluguel diário de

E) 52 horas. uma máquina.

18 Coleção Estudo

Regra de três

02. (Enem–2004) O jornal de uma pequena cidade publicou **04.**

(Enem–2002) Os números e cifras envolvidos, quando

a seguinte notícia: lidamos com dados sobre produção e consumo de energia

em nosso país, são sempre muito grandes. Apenas no setor

Correio Da CiDaDE residencial, em um único dia, o consumo de energia elétrica

abastecimento comprometido

é da ordem de 200 mil MWh. Para avaliar esse consumo,

O novo polo agroindustrial em nossa cidade tem imagine uma situação em que o Brasil não dispusesse

atraído um enorme e constante fluxo migratório,

de hidrelétricas e tivesse de depender somente de resultando em um aumento da população em torno

termoelétricas, onde cada kg de carvão, ao ser queimado,

de **2 000 habitantes por ano**, conforme dados do

permite obter uma quantidade de energia da ordem de
nosso censo:

10 kWh. Considerando que um caminhão transporta, em
ano População média, 10 toneladas de carvão, a quantidade de
caminhões 1995 11 965 de carvão necessária para abastecer as
termoelétricas,

1997 a cada dia, seria da ordem de 15 970

A) 20 D) 2 000

1999 19 985

b) 200 E) 10 000

2001 23 980

C)

1

000

2003 27 990

05.

(Enem–
2007)

Esse crescimento tem ameaçado nosso fornecimento

álcool, crescimento e pobreza

de água, pois os mananciais que abastecem a cidade

têm capacidade para fornecer até **6 milhões de** O lavrador de
Ribeirão Preto recebe em média

litros de água por dia. A prefeitura, preocupada R\$ 2,50 por
tonelada de cana cortada. Nos anos 80,

com essa situação, vai iniciar uma campanha visando esse trabalhador
cortava cinco toneladas de cana por dia.

a estabelecer um consumo médio de **150 litros por** A mecanização da colheita o obrigou a ser mais produtivo.

dia, por habitante. O corta-cana derruba agora oito toneladas por dia.

O trabalhador deve cortar a cana rente ao chão,

MATEMÁTICA

A análise da notícia permite concluir que a medida é encurvado. Usa roupas mal-ajambradas, quentes, que

oportuna. Mantido esse fluxo migratório e bem-sucedida lhe cobrem o corpo, para que não seja lanhado pelas

a campanha, os mananciais serão suficientes para folhas da planta. O excesso de trabalho causa a birola:

abastecer a cidade até o final de tontura, desmaio, cãibra, convulsão. A fim de aguentar

dores e cansaço, esse trabalhador toma drogas e soluções

A) 2005 D) 2008

de glicose, quando não farinha mesmo. Tem aumentado

b) 2006 E) 2009 o número de mortes por exaustão nos canaviais.

C) 2007 O setor da cana produz hoje uns 3,5% do PIB. Exporta

Us\$ 8 bilhões. Gera toda a energia elétrica que consome e

03. (Enem–2009) Uma escola lançou uma campanha para ainda vende excedentes. A indústria de São Paulo contrata

seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos cientistas e engenheiros para desenvolver máquinas e

não perecíveis para doar a uma comunidade carente da equipamentos mais eficientes para as usinas de álcool.

As pesquisas, privada e pública, na área agrícola (cana,

região. vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros

laranja, eucalipto, etc.) desenvolvem a bioquímica e a

10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg

Genética
no
país.

de alimentos por dia. Animados com os resultados,

FOLHA DE s. PAULO, 11 mar. 2007 (Adaptação).

30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram

a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o Considere-se que
cada tonelada de cana-de-açúcar

término da campanha. Admitindo-se que o ritmo de coleta permita
a produção de 100 litros de álcool combustível,

tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos vendido nos
postos de abastecimento a R\$ 1,20 o litro.

arrecadados ao final do prazo estipulado seria de Para que um
corta-cana pudesse, com o que ganha nessa

atividade, comprar o álcool produzido a partir das oito

A) 920 kg.

toneladas de cana resultantes de um dia de trabalho, ele

b) 800 kg.

teria de trabalhar durante

C) 720 kg. A) 3 dias. D) 48 dias.

D) 600 kg. b) 18 dias. E) 60 dias.

E) 570 kg. C) 30 dias.

Frente B Módulo 05

06. (Enem–2009) A cisterna é um recipiente utilizado

GABARITO

para armazenar água da chuva. Os principais
critérios a serem observados para captação e

armazenagem de água da chuva são: a demanda **Fixação**

diária de água na propriedade; o índice médio de
precipitação (chuva), por região, em cada período 01. A
do ano; o tempo necessário para armazenagem;

02.
b

e a área de telhado necessária ou disponível para captação.

Para fazer o cálculo do volume de uma cisterna, deve-se 03. b

acrescentar um adicional relativo ao coeficiente de
evaporação. Na dificuldade em se estabelecer um 04. A
coeficiente confiável, a Empresa Brasileira de Pesquisa

05.
b

Agropecuária (Embrapa) sugere que sejam adicionados

10% ao volume calculado de água. Desse modo,

Propostos

o volume, em m³, de uma cisterna é calculado por

$v_c = v_d \times N_{\text{dia}}$, em que v_d = volume de demanda

da água diária (m³ 01. b), N_{dia} = número de dias de armazenagem, e este resultado deve ser acrescido de

02.
b

10%. Para melhorar a qualidade da água, recomenda-se que a captação seja feita somente nos telhados das 03. E edificações. Considerando que a precipitação de chuva de 1 mm sobre uma área de 1 m produz 1 litro de 2 04. D água, pode-se calcular a área de um telhado a fim de 05. E atender a necessidade de armazenagem da seguinte maneira: área do telhado (em m 06. D 2) = volume da cisterna (em litros)/precipitação.

07.
b

Disponível em: .

Acesso em: 8 jun. 2009 (Adaptação). 08. C

Para atender a uma demanda diária de 2 000 litros 09. b de água, com período de armazenagem de 15 dias e precipitação média de 110 mm, o telhado, retangular, 10. E deverá ter as dimensões mínimas de

A) 6 metros por 5 metros, pois assim teria uma área de

Enem

Seção

30 m².

01.

D

b) 15 metros por 20 metros, pois assim teria uma área de 300 m² 02. E .

C) 50 metros por 60 metros, pois assim teria uma área de 3 000 m². 03. A

04.

D

D) 91 metros por 30 metros, pois assim teria uma área de 2 730 m² 05. D .

E) 110 metros por 30 metros, pois assim teria uma área de 3 300 m². 06. b

20 Coleção Estudo MATEMÁTICA

MÓDULO FRENTE Geometria de posição e 06 B poliedros

GEOMETRIA DE POSIÇÃO v) se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então ela está contida no plano.

Introdução

Alguns conceitos na Geometria são intuitivos, primitivos e, B r

por isso, não necessitam de definição. A Geometria de A r = AB posição é construída com base nas noções intuitivas de

ponto, reta e plano, que estão exemplificadas na figura α

a seguir:

D C α Determinação de planos

r Dizemos que um plano está determinado quando ele é A B

único. Existem quatro modos de se determinar planos:

i) Por três pontos não colineares.

i) a, B, C e D são pontos;

ii) C r ou AB é a reta que contém os pontos a e B;

$$A \alpha = (A, B, C) B$$

iii) α é o plano que contém o teto da casa. α

A partir dos conceitos básicos de ponto, reta e plano, podemos enunciar alguns postulados (verdades aceitas sem

ii) Por uma reta e um ponto fora dela.

demonstração):

i) Em uma reta, bem como fora dela, há infinitos pontos. B A

r

ii) Em um plano, bem como fora dele, há infinitos pontos. C α

iii) Dois pontos distintos determinam uma única reta que

passa por eles. iii) Por duas retas concorrentes.

A B

$$r = AB \text{ } r \text{ } r$$

α s

iv) Por um ponto passam infinitas retas.

r

iv) Por duas retas paralelas distintas.

s

A

t

r

v u s α

Editora Bernoulli 21

Frente B Módulo 06

Posições relativas entre duas retas

Caso particular:

Duas retas que pertencem ao mesmo plano (coplanares) Duas retas são ortogonais se, e somente se, são reversas

podem ser: paralelas ou concorrentes. e formam ângulo reto.

resumindo

Paralelas Dadas duas retas quaisquer, podemos classificá-las da

Duas retas coplanares são paralelas se, e somente se, são seguinte maneira:

coincidentes ou não têm ponto comum.

r r { { Coincidentes | Paralelas } | }

Distintas $\equiv$ s s Retas coplanares $\{ \mid \mid$ ou $\mid$
Concorrentes

$\alpha \alpha \{$ Reversas Retas não coplanares $\{$

$\mid$

Paralelas Paralelas

coincidentes distintas **Posições relativas**
entre uma reta

Concorrentes e um plano

Duas retas são concorrentes se, e somente se, elas
têm

Uma reta e um plano podem admitir as seguintes
posições

um único ponto comum.

relativas:

r Reta contida no plano

$$P \cap r = \{P\}$$

αs

$B \cap r$

Caso particular:

A

Duas retas são perpendiculares se, e somente se, são concorrentes e formam ângulo reto. α

s Uma reta r (Ab) está contida em um plano α se, e somente

se, todos os pontos da reta pertencem ao plano.

P r Reta secante (ou concorrente) ao plano

r

Reversas P

Duas retas são reversas se, e somente se, não existir um α

plano que as contenha, ou seja, se não forem coplanares.

Uma reta e um plano são secantes se possuem um único

r ponto em comum.

s Reta paralela ao plano

$$\alpha \cap r = \emptyset$$

$$\alpha \perp r$$

r reversa a s

α

Não existe um plano que contém r e s simultaneamente, e,

consequentemente, $r \cap s = \emptyset$ (retas reversas não possuem Uma reta e um plano são paralelos se, e somente se, não

pontos em comum). possuem pontos em comum.

22 Coleção Estudo

Geometria de posição e poliedros

Posições relativas entre planos

Teorema

Dois planos podem admitir as seguintes posições relativas:

Paralelos coincidentes se uma reta é perpendicular a um plano, então ela é

perpendicular ou ortogonal a qualquer reta do plano.

β

α Nas figuras seguintes, mostramos as duas possibilidades.

r

$$\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$$

Dois planos são coincidentes se, e somente se, possuem Os

todos os pontos em comum.

α

Paralelos distintos

r e s são perpendiculares.



$$\alpha \cap \beta = \emptyset$$

s'

O

s

Dois planos são paralelos distintos se, e somente se, não

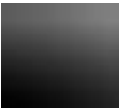
possuem ponto em comum. α

Secantes

r e s são ortogonais (reversas que formam 90°).

MATEMÁTICA

β r Teorema



α se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de



um plano, então ela é perpendicular ao plano.



r



$$\alpha \cap \beta = r$$



Dois planos são secantes se, e somente se, possuem uma s



única reta em comum. $r \perp \alpha$ O $t \alpha$



Reta perpendicular ao plano



Uma reta e um plano são perpendiculares se, e somente Observe, na fi gura, a reta que representa a intersecção



se, eles têm um ponto comum e a reta é perpendicular a de duas paredes da sala. Ela é perpendicular ao chão,



todas as retas do plano que passam por esse ponto comum. pois é perpendicular a duas retas concorrentes do chão.

r

α

$$r \perp \alpha \text{ ou } \alpha \perp r$$

Uma reta e um plano são oblíquos se, e somente se, são

concorrentes e não são perpendiculares.

Editora Bernoulli **23**

Frente B Módulo 06

Planos perpendiculares Propriedade



A soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro



Um plano α é perpendicular a um plano β se, e somente se, α contém uma reta perpendicular a β .



se, $s = (v - 2) \cdot 90^\circ$, onde v é o número de vértices, e 90° é um ângulo reto.



em que V é o número de vértices, e r é um ângulo reto (90°).

Observe, na figura, que o chão da sala (plano β) é perpendicular à parede (plano α), pois o chão possui uma **Relação de Euler** reta perpendicular à parede (reta r).

Para todo poliedro convexo, vale a relação

$$\alpha v - A + F = 2$$

em que V é o número de vértices, a é o número de arestas,

e F é o
número
de
faces.

$$\beta \perp \alpha, \text{ pois}$$

$$r \perp \alpha$$

Exemplos:

1º) 2º)

$$r \beta$$

POLIEDROS

$$v - A + F = 2 \quad v - A + F = 2$$

Poliedros são figuras espaciais fechadas formadas pela reunião

$$5 - 9 + 6 = 2 \quad 8 - 12 + 6 = 2$$

de polígonos, como mostrado nos exemplos seguintes:

Poliedros de Platão

Um poliedro é chamado poliedro de Platão se, e somente

se, satisfaz as três seguintes condições:

i) Todas as faces têm o mesmo número (n) de arestas.

ii) De todos os vértices, parte o mesmo número (**m**)

Cada polígono é denominado face do poliedro. Os lados

de
arestas

dos polígonos são as arestas do poliedro e os vértices dos

polígonos são os vértices do poliedro. **iii)** vale a Relação de Euler ($v - A + F = 2$).

Um poliedro é chamado convexo se o plano que contém **Propriedade**

qualquer um dos seus polígonos deixa os demais polígonos

Existem cinco, e somente cinco, classes de poliedros de
no mesmo semiespaço.

Platão.

Exemplos: Nomes dos poliedros de Platão

1º) 2º)

Nome m n a V F



Tetraedro 3 3 6 4 4



Hexaedro 3 4 12 8 6



Octaedro 4 3 12 6 8



Poliedro convexo Poliedro não convexo



O segundo poliedro é não convexo, pois o plano que
Dodecaedro 3 5 30 20 12



contém a face negritada, por exemplo, divide o
poliedro em



Icosaedro 5 3 30 12 20



duas partes, uma para cada semiespaço.





Geometria de posição e poliedros

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (Unimontes-MG–2007) Entre as afirmações a seguir, todas
são falsas, **ExCEto**

A) se duas paredes do mesmo tamanho forem paralelas,
toda viga que corta uma delas corta também a outra.

Tetraedro b) se duas paredes do mesmo tamanho e em
posição **Hexaedro** frontal forem paralelas, toda viga que
corta uma

delas, perpendicularmente, corta também a outra.

C) se uma viga é perpendicular ao chão, então todo
segmento de reta contido nessa viga é perpendicular

D) se duas vigas que sustentam um teto plano são
perpendiculares ao chão, então esse teto é paralelo

Octaedro Dodecaedro

02. (UEPB–2007) Sejam as afirmativas:

I. Duas retas que não se interceptam são paralelas entre si.

II. Duas retas que não se interceptam são reversas entre si.

III. se uma reta é perpendicular a uma reta do plano,
então ela é perpendicular a esse plano.

IV. Uma reta e um plano são paralelos. Toda reta

Icosaedro perpendicular à reta dada é perpendicular ao plano.

ObsERvAção Podemos concluir que

Um poliedro é regular se ele é de Platão e possui
todas A) apenas I é verdadeira.

as arestas congruentes. Todo poliedro regular é
poliedro de b) apenas II é verdadeira. **MATEMÁTICA**
Platão, mas nem todo poliedro de Platão é poliedro
regular. C) todas são falsas.

Exemplos: D) apenas III é verdadeira.

1º) 2º) E) apenas IV é verdadeira.

03. (FUvEsT-sP) Dados um plano α e uma reta r , podemos

afirmar
que

Paralelepípedo: poliedro de

Cubo: poliedro de Platão não regular A) existe um plano β que contém r e é perpendicular a α .

Platão regular b) existe um único plano β que contém r e é perpendicular

a
 α .

EXERCÍCIO RESOLVIDO C) existe um plano β que contém r e é paralelo a α . D) existe um único plano β que contém r e é paralelo a α .

01. (PUCPR) O tetra-hexaedro é um sólido convexo limitado E) qualquer plano β que contém r intercepta o plano α .

por 4 faces triangulares e 6 hexagonais, todas regulares.

O número de arestas e vértices desse sólido é **04.** (UFAM) Um poliedro convexo tem três faces triangulares,

A) $A = 21$ e $v = 13$ D) $A = 32$ e $v = 24$ uma face quadrangular, uma face pentagonal e duas faces

b) $A = 24$ e $v = 16$ E) $A = 34$ e $v = 24$ hexagonais. Então, o número de vértices desse polígono

C) $A = 48$ e $v = 40$ é igual a

Resolução: A) 7 D) 12

Em 4 faces triangulares, temos 12 lados, e, em 6 faces b) 15 E) 9 hexagonais, temos 36 lados, totalizando 48 lados. Cada C) 10 lado é comum a duas faces e, portanto, foi contado duas vezes. Assim, o número de arestas **a** é: **05**. (UFC) Um poliedro convexo só tem faces triangulares

$2A = 48$ e quadrangulares. se ele tem 20 arestas e 10 vértices, $\Rightarrow A = 24$

Aplicando a Relação de Euler a esse poliedro convexo, então o número de faces triangulares é

temos: A) 12 D) 9

$v + F = A + 2 \Rightarrow v + 10 = 24 + 2 \Rightarrow v = 16$ b) 11 E) 8

Logo, esse sólido possui 24 arestas e 16 vértices. C) 10

Editora Bernoulli **25**

Frente B Módulo 06

EXERCÍCIOS PROPOSTOS **04**. (EFOA-MG)

Das alternativas a seguir, assinale a **iNCorrEta**.

01. (FAAP-SP) O galpão da figura a seguir está no prumo e A) Dois planos, quando se interceptam, o fazem segundo

a cumeeira está “bem no meio” da parede. uma reta.

s cumeeira u paralelos. 4 m b) Dois planos perpendiculares a uma mesma reta são

A

t v C) Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são

3 m paralelas.

D) Duas retas perpendiculares determinam um único

r

plano.

4 m E) Existem planos concorrentes com apenas cinco pontos

comum

Das retas assinaladas, podemos afirmar que

A) **t** e **u** são reversas. **05.** (UFJF-MG–2008) O plano p é perpendicular ao plano p_1 e p_2

b) **s** e **u** são reversas. o plano p é perpendicular ao plano p_1 e os planos p_2 e p_3

e p_3 se interceptam segundo uma reta l . É **CorrEto**

C) **t** e **u** são concorrentes. afirmar que

D) **s** e **r** são concorrentes. A) os planos p_1 e p_2 são perpendiculares. p_1 e p_3

E) **t** e **u** são perpendiculares. b) os planos p_1 e p_2 são paralelos. p_1 e p_3

C) o plano p_2 também contém a reta l .

02. D) a reta l é perpendicular a p_2 . (UFPE) Considere as seguintes sentenças:

I) se dois planos distintos têm um ponto comum, então E) a reta l é paralela a p_2 .

terão também outro ponto comum, distinto

do primeiro. **06.** (UNIFESP–2009) Considere o sólido geométrico exibido

II) Três pontos distintos determinam um único plano. na figura, constituído de um paralelepípedo encimado por

III) A distância entre dois pontos de uma reta é um número real que depende da unidade da medida escolhida. do sólido, conforme mostrado.

Assinale a alternativa **CorrEta**.

A) Apenas II é falsa.

b) I e II são falsas.

C) II e III são falsas.

D) I, II e III são falsas. r

E) Apenas I é verdadeira. Quantos pares de retas reversas é **PossíVEL** formar

com as retas suportes das arestas do sólido, sendo r

03. uma das retas do par? (VUNESP) Das afirmações a seguir:

A) 12 b) 10 C) 8 D) 7 E) 6

I) Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são

coplanares. **07.** (UFC–2008) O número de faces de um poliedro convexo com

II) Duas retas paralelas a um mesmo plano são paralelas 20 vértices e com todas as faces triangulares é igual a

entre si. A) 28 b) 30 C) 32 D) 34 E) 36

III) se um plano intercepta dois outros planos em retas

paralelas, então os dois planos são paralelos. **08.**

(CEsCEA-SP) Num poliedro convexo, o número de vértices

é 10 e o número de arestas é 15. Então, o número de

Temos que

faces
é

A) apenas uma é falsa. A) 23 b) 5 C) 25 D) 6 E) 7

b) apenas uma é verdadeira.

C) apenas duas são verdadeiras. **09.** (Cesgranrio) Um poliedro convexo é formado por 80 faces

triangulares e 12 pentagonais. O número de vértices do

D) todas são falsas. poliedro é

E) todas são verdadeiras. A) 80 b) 60 C) 50 D) 48 E) 36

26 Coleção Estudo

Geometria de posição e poliedros

10. (PUC-sP) Qual é o poliedro regular que tem 12 vértices **02.**
(Enem-2007) Representar objetos tridimensionais em

e 30 arestas? uma folha de papel nem sempre é tarefa fácil. O artista

A) Hexaedro D) Icosaedro holandês Escher (1898-1972) explorou essa dificuldade

b) Octaedro E) Tridecaedro criando várias figuras planas impossíveis de serem

C) Dodecaedro construídas como objetos tridimensionais, a exemplo da

litografia Belvedere, reproduzida a seguir:

11. (UFJF-MG-2007) A figura a seguir representa a



planificação de um poliedro convexo. O número de vértices deste poliedro é

A) 12 b) 14 C) 16 D) 20 E) 22

12. (Unimontes-MG–2007) O número de pares de retas reversas que se pode formar, a partir das retas suportes das arestas de um hexaedro, é

A) 16 b) 8 C) 24 D) 32

Considere que um marceneiro tenha encontrado algumas

13. (UEG–2006) Uma bola de futebol foi confeccionada figuras supostamente desenhadas por Escher e deseje

MATEMÁTICA utilizando-se 32 faces planas, sendo 20 hexagonais e construir uma delas com ripas rígidas de madeira que

12 pentagonais. Considerando-se que a bola identifica-se tenham o mesmo tamanho. Qual dos desenhos a seguir

com um poliedro assim construído, esse poliedro possui ele poderia reproduzir em um modelo tridimensional real?

exatamente

A) D)

A) 180 arestas. C) 60 vértices.

b) 90 vértices. D) 60 arestas.

14. (UFTM-MG–2007) Um poliedro convexo, com 32 arestas

e 14 vértices, possui apenas faces triangulares e

quadrangulares. sendo **q** o número de faces

quadrangulares e **t** o número de faces triangulares, então

os valores de **q** e **t** são, respectivamente,

A) $q = 6$ e $t = 14$ D) $q = 14$ e $t = 4$ b) E)

b) $q = 16$ e $t = 4$ E) $q = 4$ e $t = 16$

C) $q = 4$ e $t = 14$

SEÇÃO ENEM

01. C) (saeb) Uma caixa no formato de um poliedro precisa

ser reforçada com 3 parafusos em cada vértice,
um revestimento de metal nas suas 7 faces e uma
aplicação de uma cola especial em todas as 15 arestas.
A quantidade necessária de parafusos será igual a
A) 72 b) 66 C) 24 D) 30 E) 10

Editora Bernoulli 27

Frente B Módulo 06

- 03.** (Enem–2010) A figura seguinte ilustra um salão de
um clube onde estão destacados os pontos **a** e **B**.

GABARITO

B Fixação

01. b

02.
C

A

03.
A

Nesse salão, o ponto em que chega o sinal da Tv a 04. C
cabo fica situado em **a**. A fim de instalar um telão para
a transmissão dos jogos de futebol da Copa do Mundo, 05. E

esse sinal deverá ser levado até o ponto **B** por meio de

Propostos

um cabeamento que seguirá na parte interna da parede
e do teto. O menor comprimento que esse cabo deverá
ter para ligar os pontos **a** e **B** poderá ser obtido por meio 01. A
da seguinte representação no plano:

02. A

B

03. b

A) 04. E A

05.
D

B

06.
C

07.
E

B) A

08.
E

B 09. b

10.
D

C) A

11.
A

12.
C

B

13.
C

D) 14. E A

Seção Enem

B

01.
D

02.
E

28 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Função quadrática 05 C

INTRODUÇÃO somando b_2 aos dois membros da equação, a fim de completarmos o quadrado do lado esquerdo, temos:

sabe-se que em cerca de 2000 a.C., os babilônios já

$$4a_2x^2 + 4abx + b_2 = b_2 - 4ac$$

estavam familiarizados com equações do segundo grau,

aplicadas à resolução de problemas práticos. Um matemático O lado esquerdo da equação é um trinômio quadrado

indiano, de nome bhaskara, promoveu um enorme avanço perfeito. Logo, podemos escrever:

na resolução de equações do segundo grau, ao desenvolver $(2ax + b) = b_2 - 4ac \Rightarrow 2ax + b = \pm \sqrt{b_2 - 4ac} \Rightarrow$ uma fórmula para o cálculo das suas

raízes.

Matemática. Seu gráfico descreve uma curva extremamente A função quadrática é uma das funções mais importantes da $- \pm b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ $2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ importante, denominada parábola, que serve, por exemplo, Denotando pela letra grega delta (D) o termo $b^2 - 4ac$, para descrever a trajetória de um projétil lançado obliquamente obtemos: no ar. Hoje, reconhecemos que a função quadrática é muito



indicada para a modelagem de problemas nos quais é $- \pm \Delta b x =$, em que $D = b^2 - 4ac$ necessária a determinação de quantidades máximas ou 2 a mínimas, indicadas pelas coordenadas do seu vértice.



Esse resultado é conhecido como Fórmula de
bhaskara.



DEFINIÇÃO DE ObsERvAçÕEs

FUNÇÃO QUADRÁTICA i) se $D < 0$, a função não possui raízes reais.

A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que ii) se $D = 0$, a função tem duas raízes reais iguais.

a, **b** e **c** são constantes reais e $a \neq 0$, é dita função quadrática ou função polinomial do segundo grau. Seu gráfico é uma iii) se $D > 0$, a função tem duas raízes reais distintas.

curva chamada **parábola**.

Exemplo

RAÍZES DA FUNÇÃO Calcular as raízes da função $f(x) = x^2 + x - 12$.

QUADRÁTICA *Resolução:*

Igualando a expressão a zero, temos $x^2 + x - 12 = 0$.

Fórmula de Bhaskara Ora, $a = 1$, $b = 1$ e $c = -12$.

Para encontrarmos as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, Daí, $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) \Rightarrow D = 1 + 48 \Rightarrow D = 49$

com $a \neq 0$, devemos fazer $f(x) = 0$.

Assim, obtemos a equação $ax^2 + bx + c = 0$. Assim: $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Logo, temos $ax^2 + bx + c = 0$. Denotando por x_1 e x_2 as raízes procuradas, temos: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

Multiplicando os dois membros por $4a$, obtemos: $4ax^2 + 4abx + 4ac = 0$.
 $4ax^2 + 4abx = -4ac$ Portanto, $s = \{-4, 3\}$.

Editora Bernoulli 29

Frente C Módulo 05

Soma e produto das raízes
 GRÁFICOS DE FUNÇÕES

sejam x_1 e x_2 as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$,
com $a \neq 0$.

QUADRÁTICAS

$a \neq 0$. Conhecemos as seguintes relações:

Já sabemos que o gráfico de uma função quadrática é uma

i) soma das raízes da função parábola. Tal curva é definida, geometricamente, como a

interseção de um cone de revolução e um plano paralelo à



ii) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ Geratriz do cone, conforme figura a seguir:

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ Produto das raízes da função

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ Geratriz $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$



a

Exemplo

Calcular, utilizando as relações de soma e produto, as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Para esboçarmos o gráfico de uma função quadrática,

Resolução: devemos seguir a seguinte sequência:

i) Determinar a concavidade da parábola. $+x = - \Rightarrow x + x = - \Rightarrow x + x = 5$ e 1 Quando a (coeficiente de x^2) é positivo, a parábola

$x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot 1 \cdot c \cdot 6$

$2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = \Rightarrow = \Rightarrow x \cdot x \cdot 6$ tem concavidade para cima.
=

$a \cdot 1 \cdot 1$

Quando a é negativo, a parábola tem concavidade

Assim, os números que satisfazem essas condições para baixo.

são 2 e 3.

ii) Determinar a interseção da parábola com o eixo Oy.

Portanto, $s = \{2, 3\}$. A parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, c)$.

iii) Determinar as interseções da parábola com o eixo

FORMA FATORADA DA FUNÇÃO

Ox (raízes). Conforme visto anteriormente, a

existência ou não $f(x) = ax^2 + bx + c$,

com $a \neq 0$ de raízes reais depende do valor de D , na Fórmula

de
bhaskara

Uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, se $D < 0$, a função não tem raízes reais, ou seja,

que possua raízes reais x_1 e x_2 , pode ser escrita como um

produto de duas funções do primeiro grau.

se $D = 0$, a função tem duas raízes reais iguais, ou



$f(x) = a(x - x_0)^2$ seja, a parábola intercepta o eixo das abscissas em $(x_0, 0)$ um único ponto.

Exemplo se $D > 0$, a função tem duas raízes reais distintas,

ou seja, a parábola intercepta o eixo das abscissas

Escrever a função quadrática $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$,

em
dois
pontos

na forma fatorada.

iv) Determinar as coordenadas do vértice V da

parábola.

Resolução:

vértice é o ponto de interseção da parábola com o eixo

Cálculo das raízes: de simetria. Como x pertence ao eixo de simetria, v

$D = (-6)$ as abscissas dispostas de maneira simétrica em $2 - 4.2.4 \Rightarrow D = 36 - 32 \Rightarrow D = 4$

relação a x possuem a mesma imagem. v

$x = - \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2}$ Logo, x é a média aritmética das raízes. $\Rightarrow x = 1$ e $x = 2$.



Assim, a função $f(x) = 2x^2 + x - 6$, na forma fatorada, $x = 1$ ou $x = -\frac{3}{2}$ a $f(x) = 2(x - 1)(x + \frac{3}{2})$.

30 Coleção Estudo

Função quadrática

substituindo, na parábola, $y = ax^2 + bx + c$,

Resolução:

com $a \neq 0$, temos: Como a concavidade da parábola está voltada para baixo,



$$y = ax^2 + b.x + c \quad y_{\text{v}} \Rightarrow = -\frac{\Delta}{2a} \text{ temos } a < 0.$$

Além disso, observe que a interseção do gráfico com o eixo Oy ocorre em um ponto de ordenada

Portanto, o ponto $v = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} \right)$ é o vértice da parábola. Conforme visto anteriormente, esse ponto é

igual a $(0, c)$. Logo, temos que $c > 0$.

parábola.

Para investigarmos o sinal do b , vamos considerar a

parábola. Determinados esses valores, basta esboçarmos a abscissa do vértice da parábola. sabemos que $x_v = -\frac{b}{2a}$.

2a

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Pelo gráfico, verificamos que x_v é positivo. Como a é

negativo, temos que $-b$ deve ser negativo. Ora, isso

01. ocorre somente se b for positivo. Fazer o esboço da parábola $y = 2x^2 - 3x + 1$.

Resolução: Logo, $b > 0$.

Concavidade:

Temos $a = 2 > 0$, ou seja, a concavidade está voltada

para cima. Regra prática para a determinação

Interseção com o eixo Oy :

Temos que $c = 1$, ou seja, a parábola intercepta o eixo **do**
sinal de b

das ordenadas no ponto $(0, 1)$.

Raízes:

No exercício anterior, mostramos uma maneira de

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow D = 9 - 8 \Rightarrow D = 1$$

determinar o coeficiente **b**. veremos agora uma regra
prática

Logo, as raízes são 1 e 1.

MATEMÁTICA 2 i) se a parábola está “subindo” quando intercepta o vértice $v = (x_v, y_v)$: eixo das ordenadas, então $b > 0$. $x = - -$

$\pm \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} x \Rightarrow = \pm \Rightarrow x_1 = e$
 $x_2 = 1$ para a obtenção desse sinal.
 $2 \ 2 \ . \ 4 \ 2$

$$x = - \Rightarrow x_{vv} = - = \left(\begin{matrix} b(-) & 3 & 3 \\ 2 \end{matrix} \right) \begin{matrix} a & 2 & 2 & . & 4 \\ || & 3 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} y \\ \Delta & 1 & 1 & 4 & 8 \\ || \end{matrix}$$

$$\left(\begin{matrix} - \\ \Rightarrow V = | \end{matrix} \right) , - \begin{matrix} | \\ y \end{matrix} y$$

$${}_v y = \Rightarrow_v = - = - \begin{matrix} | & 4 & a & 4 & 2 & . & 8 \end{matrix} \begin{matrix} | \\ \text{"subindo"} \end{matrix} \begin{matrix} | \\ \text{"subindo"} \end{matrix}$$

Esboço do gráfico: $O \ x \ O \ x$

y

ii) se o vértice encontra-se exatamente no eixo das

1

ordenadas, então $b = 0$.

1 3

2 4 1

$O \ y \ y \ x$

1

8 V

02. (FAFI-MG) O gráfico de uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$

está representado a seguir. Podemos afirmar que

y

iii) se a parábola está “descendo” quando intercepta o

eixo das ordenadas, então $b < 0$.

O y y x

A) $a < 0, b < 0$ e $c < 0$ "descendo" D) $a < 0, b > 0$ e $c > 0$ "descendo"

b) $a < 0, b < 0$ e $c > 0$ E) $a > 0, b < 0$ e $c < 0$

O x O x

C) $a < 0, b > 0$ e $c < 0$

Editora Bernoulli 31

Frente C Módulo 05

VALOR MÁXIMO E VALOR Portanto, as raízes são $x = 0$ e $x = 2$.^{1 2}

MÍNIMO DA FUNÇÃO vértice: se $a > 0$, a parábola $y = ax^2 + bx + c$ possui concavidade para cima. Nesse caso, é fácil constatar que existe um valor mínimo assumido por y , que coincide com a ordenada do vértice y . A função está definida no intervalo $0 \leq x \leq 3$. Portanto, essa ordenada é o valor mínimo da função.

Se $a > 0$, a parábola $y = ax^2 + bx + c$ possui concavidade para cima. Nesse caso, é fácil constatar que existe um valor mínimo assumido por y , que coincide com a ordenada do vértice y . A função está definida no intervalo $0 \leq x \leq 3$. Portanto, essa ordenada é o valor mínimo da função.

do vértice y A função está definida no intervalo $0 \leq x \leq 3$.

Portanto, essa ordenada é o valor mínimo da função.

y para $x = 3$, temos $y = 3$.

$$a > 0$$

$$\Delta$$

$$4a$$

$$O x$$

i) $y = \frac{b^2}{4a}$ é o valor mínimo da função.

ii) A imagem (Im) da função é dada por:



$Im = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{b^2}{4a} \}$ Pelo gráfico anterior, verificamos que os valores mínimo e máximo de y , nessa ordem, são $-\frac{b^2}{4a}$ e $\frac{b^2}{4a}$.

se $a < 0$, a parábola $y = ax^2 + bx + c$ possui concavidade para baixo. Nesse caso, verificamos que existe um valor máximo assumido por y e, analogamente,

coeficiente angular positivo, e a reta $s: y = cx + d$ tem

valor máximo assumido por y e, analogamente,

dizemos

que a ordenada do vértice y é o valor máximo da função. Δ coeficiente angular negativo.

$$y = -\frac{\Delta}{4a}x + \frac{\Delta^2}{4a}$$

i) $y = -\frac{\Delta}{4a}$ é o valor máximo da função. Δ $4a$ x

ii) A imagem (Im) da função é dada por: A figura que MELHOR representa o gráfico do trinômio

$y =$
 $(ax + b)^2 + c$
 $(cx + d)^2 + e$
 é



$$\text{Im} = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{\Delta^2}{4a} \}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

O x O x

03. (UFU-MG) sendo x e y números reais tais que $0 \leq x \leq 3$

e $y = x^2 - 2x$, os valores mínimo e máximo de y são,
nessa ordem, iguais a

A) 0 e 6 C) -1 e 6 E) 3 e 9

b) -1 e 9 D) -1 e 3 O

O x x

Resolução:

Raízes da função: C) y

$$x^2 - 2x = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 \Rightarrow D = 4$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2}{2} \Rightarrow x = 0 \text{ e } x = 2$$

32 Coleção Estudo

Função quadrática

Resolução: EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Efetuada a multiplicação dos termos, obtemos

$y = (ac)x^2 + (ad + bc)x + bd$. Trata-se de uma
função **01.** (UFMG) Observe a figura, que representa o gráfico de

quadrática. Analisando as retas dadas, temos que a é $y = ax^2 + bx + c$. Assinale a única afirmativa **Falsa** em

positivo, b é positivo, c é negativo e d é positivo. Portanto, relação a esse gráfico.

ac é negativo (concavidade voltada para baixo). Além

y

disso, bd é positivo, ou seja, a parábola intercepta o eixo

Oy em um ponto de ordenada positiva. Entre os gráficos,

o único com essas características é o da letra A.

O

05. x (Fafeid-MG) No instante $t = 0$, uma bola é atirada

verticalmente para cima, de uma altura de 5 cm acima do

solo. Após t segundos, a sua altura s , em cm, acima do A) ac é negativo. C) b é positivo.

solo, é dada por $s = 5 + 40t - 16t^2$ b) $b^2 - 4ac$ é positivo. D) c é negativo. . Assim, é **Correto**

afirmar que a altura máxima da bola, acima do solo,

em cm, é igual a **02.** (UFJF-MG) Um ônibus de 54 lugares foi fretado para uma

A) 30 excursão. A empresa cobrou de cada passageiro a quantia

de R\$ 55,00 e mais R\$ 2,50 por lugar vago. O número de

b) 25

passageiros que dá à empresa rentabilidade máxima é

C) 55

A) 16 b) 24 C) 38 D) 49 E) 54

D) 20

Resolução: 03. (UFMG) A função $f(x)$ do segundo grau tem raízes -3 e 1 .

O gráfico de $s(t)$ é parabólico, com concavidade voltada A ordenada do vértice da parábola, gráfico de $f(x)$,

para baixo. Assim, a altura máxima corresponde à Δ é igual a 8 . A única afirmativa **VerDaDEira** sobre $f(x)$ é:

ordenada do vértice. A) $f(x) = -2(x - 1)(x + 3)$

$D = 402 - 4 \cdot (-16) \cdot 5 \Rightarrow D = 1\ 600 + 320 \Rightarrow D = 1\ 920$ b) $f(x) = -$
 $(x - 1)(x + 3)$ **MATEMÁTICA**

y C) $f(x) = -2(x + 1)(x - 3)$ y $y_v = -\Delta \Rightarrow = 1$
 $920 \cdot 1 \cdot 920 - \Rightarrow y_v \Rightarrow = 30_v = -_v 4 \cdot 4 \cdot 16 (-) - 64$ D)
 $f(x) = (x - 1)(x + 3)$

A altura máxima alcançada é 30 cm. E) $f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$

06. (PUC Minas) Uma empresa fabrica x peças por dia, e seu **04.**
 (UFV-MG-2010) Um retângulo tem três de seus vértices

lucro em reais é dado pela função $L(x) = 100(9 - x)(x - 1)$. nos pontos $(0, 0)$, $(x, 0)$ e $(0, y)$, sendo x e y positivos,

O lucro máximo obtido pela empresa, por dia, em reais, é

e o quarto vértice encontra-se sobre a reta $2x + 3y = 6$.

A) $1\ 200$ Nessas condições, o retângulo de área máxima tem

b) $1\ 300$ perímetro com medida igual a

C) $1\ 400$ A) 4 b) 6 C) 5 D) 7

D) $1\ 500$

E) $1\ 600$ **05.** (UNIFESP-2007) A figura mostra um arco parabólico
 ACB

de altura $CM = 16$ cm, sobre uma base Ab de 40 cm.

Resolução:

M é o ponto médio de Ab .

Efetuando os produtos indicados, obtemos:

$$L(x) = -100x^2 + 1\,000x - 900$$

2 C

Observe que o lucro $L(x)$ é uma função quadrática do número de peças x . Como a concavidade está voltada para baixo, o lucro máximo corresponde à ordenada do vértice. A M B

$$D = 1\,000 - 4(-100)(-900) \Rightarrow$$

A altura do arco, em centímetros, em um ponto da base

$$D = 1\,000 - 360\,000 \Rightarrow D = 640\,000 \text{ que dista } 5 \text{ cm de } M, \text{ é}$$

$$y \Delta 640\,000 \quad 640\,000 \quad A) 15 \quad D) 12 = - \Rightarrow y \quad y \Rightarrow y \\ = 1\,600 \quad v \quad v = - \Rightarrow v = - \quad v \quad 4 \quad a \quad 4\,100 \quad (-) - 400 \quad b) 14 \quad E) 10$$

O lucro máximo é igual a R\$ 1 600,00. C) 13

Editora Bernoulli 33

Frente C Módulo 05

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 05. (UFMG) A função $f(x) = x^2 + bx + c$, com b e c reais, tem duas raízes distintas

pertencentes ao intervalo $[-2, 3]$.

01. Então, sobre os valores de **b** e **c**, a única afirmativa (PUC Minas)
Uma pedra é atirada para cima e sua

altura **h**, em metros, é dada pela função $h(t) = at^2 + 12t$,

em que **t** é medido em segundos. se a pedra atingiu a A) $c < -6$ D)
 $b < -6$

altura máxima no instante $t = 2$, pode-se afirmar que o b) $c > 9$ E)
 $4 < b < 6$

valor de **a** é C) $-6 < b < 4$

A) -3 b) -2 C) 2 D) 3

06. (PUC-Campinas-SP) sejam x_1 e x_2 as raízes reais da

02. (PUC Minas) O intervalo no qual a função
equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$. se $a > 0$, $- < 0$ $f(x) = x^2$
 $- 6x + 5$ é crescente é a a

A) $x < 5$ e x C) $x > 1$ $1 < x_2$, deve-se ter

b) $1 < x < 5$ D) $x > 3$ A) $0 < x < 1$ $x < 0 < x_1$ $2 < x_2$

03. (UFMG) Observe a figura. C) $0 < x_1 < x_2$ y b) $x < -1 < 0 < x$
E) $x < x < 0$ $1 < x_1$ $2 < x_2$

07. (UFMG) Um certo reservatório, contendo 72 m^3 de água,

deve ser drenado para limpeza. Decorridas **t** horas
após o início da drenagem, o volume de água que saiu

do reservatório, em m^3 , é dado por $v(t) = 24t - 2t^2$.

5 sabendo-se que a drenagem teve início às 10 horas,

O x o reservatório estará completamente

vazio às

–5 A) 14 horas. C) 19 horas.

V

b) 16 horas. D) 22 horas.

Nessa figura, está representada a parábola de vértice **V**,

gráfico da função de segundo grau cuja expressão é

08. (PUC-sP) Ao levantar dados para a realização de um

A) $y = x^2$ evento, a comissão organizadora observou que, se $2x - 2x$
D) $y = -10x$ cada pessoa pagasse R\$ 6,00 por sua inscrição, poderia
5 5 contar com 460 participantes, arrecadando um total de

b) $y = x^2 - 10x$ E) $y = +10x$ R\$ 2 760,00. Entretanto, também
estimou que, a cada 2

5 aumento de R\$ 1,50 no preço de inscrição, receberia

C) $y = x^2 + 10x$ 10 participantes a menos. Considerando tais
estimativas,

04. para que a arrecadação seja a maior possível, o preço

(UFJF-MG) Considere uma função $f: \square \rightarrow \square$ dada pela
unitário da inscrição em tal evento deve ser

expressão $f(x) = -x^2 + bx + c$, em que **b** e **c** são reais,

A) R\$ 15,00. D) R\$ 37,50.

e cujo gráfico tem eixo de simetria na reta $x = 1$ e módulo

da diferença entre as raízes igual a 4. Um esboço que b) R\$ 24,50.
E) R\$ 42,50.

pode representar o gráfico de tal função é C) R\$ 32,75.

A) y D) y **09.** (UFMG) O ponto de coordenadas (3, 4) pertence à

parábola de equação $y = ax^2 + bx + 4$. A abscissa do O 1 O 1 vértice dessa parábola é x

x A) 1 3 b) 1 C) D) 2

2 2

b) y E) y **10.** (CEFET-MG-2009) A função $L(x) = -x(x - k)$ representa

O o lucro de uma empresa em função da quantidade de 1
x capital empregado x, sendo k um valor real fixo. Se o O 1 x
lucro máximo atingido pela empresa foi o valor positivo y,
então é **CorrEto** afirmar que k é igual a

C) y A) 3^1y D) $^1y - 1$

O b) 2^1y E) $^1y - 2$

1 x y C) 3

34 Coleção Estudo

Função quadrática

11. (PUC-Campinas-SP) seja r um retângulo que tem 24 cm de **15.**
(UFMG) Observe esta figura.

perímetro. Unindo-se sucessivamente os pontos médios dos y
 lados de r , obtém-se um losango. Qual deve ser a medida
 do lado desse losango para que sua área seja máxima?

- A) 3 cm
- B) $3^{1/2}$ cm
- C) 6 cm
- D) $6^{1/2}$ cm
- E) 9 cm

Nessa figura, os pontos **a** e **B** estão sobre o gráfico da

12. (PUC-Campinas-SP) A soma e o produto das raízes de uma função de segundo grau $y = ax^2 + bx + c$. O ponto **a**

função do 2º grau são, respectivamente, 6 e 5. se o valor situa-se no eixo das ordenadas, e o segmento **Ab** é

mínimo dessa função é -4 , então seu vértice é o ponto paralelo ao eixo das abscissas. Assim, é **CorrEto**

afirmar que o comprimento do segmento **AB** é

- b) $(11) a a a, | - 4 | (A) (3, -4) A) c b) c b b - C) D) - 2)$

16. (PUC-Campinas-SP) Na figura a seguir tem-se um

- C) $(0, -4)$

quadrado inscrito em outro quadrado.

- D) $(-4, 3)$

E) $(-4, 6)$

13. x (UFJF-MG-2009) Num sistema de coordenadas

cartesianas, o ponto r se desloca sobre o eixo das

ordenadas, a partir do ponto $(0, 30)$, em direção à

origem o , com velocidade de 1 cm/s , e o ponto s se $x \rightarrow 8 - x$

desloca sobre o eixo das abscissas, partindo do ponto

MATEMÁTICA

$(2, 0)$, com o dobro dessa velocidade. Eles partem no

mesmo instante. Veja a figura a seguir:

Pode-se calcular a área do quadrado interno, subtraindo-se

y da área do quadrado externo as áreas dos 4 triângulos.

30 Feito isso, verifica-se que a é uma função da medida x .

R O valor mínimo de a é

A) 16 cm^2 . D) 32 cm^2 . b) 24 cm^2 . E) 48 cm^2 .

O 2 S x C) 28 cm^2 .

Em quanto tempo o triângulo ROs atingirá área máxima? **17.** (UFMG) Observe esta figura.

A) 13 s y

- b) 14 s
- C) 14,5 s
- D) 15 s
- E) 15,5 s

O x

14. (PUC-sP) Usando uma unidade monetária conveniente,

o lucro obtido com a venda de uma unidade de certo

produto é $(x - 10)$, sendo x o preço de venda e 10 o preço Nela, estão representados os gráficos das funções

de custo. A quantidade vendida, a cada mês, depende do x_2

$$f(x) = e \text{ e } g(x) = 3x - 5. \text{ Considere os segmentos}$$

preço de venda e é, aproximadamente, igual a $(70 - x)$. 2

Nas condições dadas, o lucro mensal obtido com a venda paralelos ao eixo y , com uma das extremidades sobre

do produto é, aproximadamente, uma função quadrática o gráfico da função f e a outra extremidade sobre o

de x , cujo valor **Máximo**, na unidade monetária usada, é gráfico da função g . Entre esses segmentos, seja s o

que tem o menor comprimento. Assim, o comprimento

A) 1 200 D) 800 do segmento s é

b) 1 000 E) 600 1 3 5 A) b) C) 1 D) C) 900 2 4 4

Editora Bernoulli **35**

Frente C Módulo 05

18. (PUC Minas) O lucro de uma microempresa, em função **02.**
(Enem-2000) O gráfico cartesiano que melhor representa

do número de funcionários que nela trabalham, é dado, a função $R(x)$, para x real, é

em milhares de reais, pela fórmula $L(n) = 36n - 3n^2$. A) R D) R

Com base nessas informações, pode-se afirmar que o lucro
dessa microempresa é máximo quando nela trabalham

A) 6 funcionários.

b) 8 funcionários. O x O x

C) 10 funcionários. b) R E) R

D) 12 funcionários.

19. (Unifor-CE) sobre a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por

$y = -x^2 + 2x - 4$, é verdade que O x O x

A) admite as raízes $1 + \sqrt{5}$ e $1 - \sqrt{5}$. C) R

b) é crescente em $]3, 10[$.

C) é decrescente em $]0, 2[$.

D) seu conjunto imagem é $]-\infty, -3]$.

O
x

E) assume um valor mínimo para $x = 1$.

20. (FGV-sP) A função $f: [0,5] \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por **03.** (Enem-2000)
Considerando o modelo anteriormente

$f(x) = x^2 - 6x + 8$. A diferença entre o valor máximo e descrito, se o público-alvo é de 44 000 pessoas, então a

o valor mínimo dessa função é máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato

A) 2 b) 3 C) 6 D) 8 E) 9 for conhecido por um número de pessoas igual a

A) 11 000 D) 38 000

SEÇÃO ENEM b) 22 000 E) 44 000 C) 33 000

01. (Enem–2009) Um posto de combustível vende **04.** (Enem–2009 / Adaptado) A empresa WQTU Cosmético

10 000 litros de álcool por dia a R\$ 1,50 cada litro. vende um determinado produto, cujo custo de fabricação

seu proprietário percebeu que, para cada centavo de x unidades é dado por $3x^2 + 232$, e o seu valor de venda

desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros é expresso pela função $180x - 116$. A empresa vendeu

a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço 10 unidades desse produto; contudo, a mesma deseja

do álcool foi R\$ 1,48, foram vendidos 10 200 litros. saber quantas unidades precisa vender para obter um

lucro máximo. A quantidade máxima de unidades a

Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado

serem vendidas pela empresa WQTU para a obtenção

no preço de cada litro, e V o valor, em R\$, arrecadado

do
maior
lucro

por dia com a venda do álcool, então, a expressão que relaciona V e x é A) 10 b) 30 C) 58 D) 116 E) 232

A) $v = 10\,000 + 50x - x_2$

b) $v = 10\,000 + 50x + x_2$ **GABARITO**

C) $v = 15\,000 - 50x - x_2$

D) $v = 15\,000 + 50x - x_2$ **Fixação**

E) $v = 15\,000 - 50x + x_2$

01. C 02. C 03. A 04. C 05. A

instrução: Texto para as questões **02** e **03**.

Propostos

Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada

rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional 01. A 05. C 09. C 13. C 17. A

ao número de pessoas desse público que conhecem o boato 02. D 06. E 10. b 14. C 18. A

e diretamente proporcional também ao número de pessoas 03. A 07. b 11. b 15. D 19. D

que não o conhecem. Em outras palavras, sendo r a rapidez 04. E 08. D 12. A 16. D 20. E

de propagação, P o público-alvo e

x o número de pessoas que Seção

Enem

conhecem o boato, tem-se:

$R(x) = k \cdot x \cdot (P - x)$, em que k é uma constante positiva 01. D 02. E
03. b 04. b

característica do boato.

36 Coleção Estudo MATEMÁTICA

MÓDULO FRENTE Função composta e função 06 C inversa

FUNÇÃO BIJETORA

Verifi cando a
condição i, temos que:

Domínio: $D = [3, 10]$

Uma função $f: A \rightarrow b$ é bijetora se, e somente se,
essa

função atende às seguintes condições. Contradomínio:
 $CD = [5, 18]$

i) A sua imagem (Im) é igual ao seu contradomínio
(CD). Imagem (projeção do gráfi co no eixo das
ordenadas):

Observe que, ao representarmos simbolicamente
uma $Im = [5, 18]$ função f na forma $f: A \rightarrow b$, o
conjunto a é o domínio

Logo,

da função, e o conjunto **B** é o contradomínio da função.

Portanto, a condição é satisfeita se, e somente se, Verifi cando a condição **ii**: $\text{Im} = b$.

ii) Para quaisquer elementos x e x do domínio **a**, com $_{12}$ está relacionado com um único elemento do domínio. Podemos observar que cada elemento da imagem

$x)_1 \neq x$, tem-se $f(x_{21} \neq f(x))_2$. Para tal verifi cação, basta traçarmos linhas paralelas Em outras palavras, cada elemento da imagem deve

ao eixo das abscissas, a partir da imagem. Cada uma estar relacionado com um único elemento do domínio.

dessas linhas deve interceptar a curva em um único

Exemplos ponto, para que a condição seja satisfeita.

1º) Exemplo em forma de diagrama

$$f: A \rightarrow b$$

A B FUNÇÃO INVERSA 9 3

25 5

36 6 $f: A \rightarrow b$

A B

Verificando a condição i, temos que:

Domínio: $D = A = \{9, 16, 25, 36\}$

Contradomínio: $CD = b = \{3, 4, 5, 6\}$

Imagem: $Im = \{3, 4, 5, 6\}$

Logo, $CD = Im$.

Verificando a condição ii: $f^{-1}: b \rightarrow A$

Podemos observar que cada elemento da imagem No diagrama, está indicada uma função f que associa a cada

está relacionado com um único elemento do domínio. elemento de a a sua imagem em B . A função inversa de f ,

2º) Exemplo em forma de gráfico indicada por f^{-1} , é a função que associa a cada elemento de B

$f: [3, 10] \rightarrow [5, 18]$ a sua imagem em a .

y

Observe que f deve ser uma função bijetora.



...



Uma função bijetora $f: A \rightarrow b$ é inversível, e sua inversa



5 é a função $f^{-1}: b \rightarrow A$ se, e somente se, para todo



$$(x, y) \in f \rightarrow (y, x) \in f^{-1}.$$

O 3 10 x

Frente C Módulo 06

Cálculo da função inversa – regra prática EXERCÍCIO RESOLVIDO



i) Trocar x por y e y por x . **01.** (UFV-MG) seja f a função real tal que $f(2x - 9) = x$, para



ii) todo x real. A igualdade $f(c) = f^{-1}(c)$ se verifica para c Isolando o novo y .



igual
a



Exemplos A) 5 C) 3 E) 1

Determinar a função inversa das seguintes funções.

b) 7 D) 9

1º) *Resolução:* $f(x) = 3x$

(trocar Cálculo de $f(c)$: x por y e y por x): $x = 3y$

2º) (isolar o novo y): $y = xk + 9$ Fazendo $2x - 9 = k$,
temos $x = \frac{k+9}{2}$. Portanto, temos $2 \cdot \frac{k+9}{2} = 3k + 9$ $x + 9 = 3x + 9$ que $f(k) = \frac{k+9}{2}$. Logo,
podemos dizer que $f(x) = \frac{x+9}{2}$. Assim, indicamos na forma f^{-1}
 $(x) = \frac{2x-9}{2}$. Então, para $x = c$, temos $f(c) = \frac{c+9}{2}$. $x - 1 = 2$
 $f(x) = \frac{x+9}{2}$, para $x \neq -2$ $x + 2$ Cálculo de $f^{-1}(c)$:

(trocar x por y e y por x): Temos $f(x) = \frac{x+9}{2}$. $x = y$
 $-1 = 2 \Rightarrow y - 1 = xy + 2x \Rightarrow y - xy = 2x + 1$ y

+ 2 Trocando x por y e y por x , temos:

(isolar o novo y): $y + 9x = \Rightarrow y = 2x - 9 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x - 9$
 $2x + 1 = y(1 - x) = 2x + 1 \Rightarrow y = \frac{2x+1}{1-x}$, para $x \neq 1$
 $1 - x$ Logo, para $x = c$, temos $f^{-1}(c) = \frac{2c-9}{1-c}$.

Assim, indicamos na forma $f^{-1}(x) = \frac{2x-9}{1-x}$.

Fazendo $f(c) = f^{-1}(c)$, obtemos: $1 - x$

Obs: $c + 9 = 2c - 9 \Rightarrow 4c - 18 = c + 9 \Rightarrow 3c = 27 \Rightarrow c = 9$

Os gráficos da função f de sua inversa f^{-1} são simétricos

em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. **FUNÇÃO COMPOSTA**

Exemplo

sejam as funções f e g , tais que $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$,

Esboçando os gráficos das funções $f(x) = 3x$ e $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$ conforme a figura a seguir:

3

A B

em um mesmo sistema de eixos e considerando $f: A \rightarrow B$, temos:

y $f: A \rightarrow B$

f

6

Bissetriz dos

5 quadrantes $h: A \rightarrow C$ $g: B \rightarrow C$ 4
ímpares

3

2 f_{-1}

1

C

O 1 2 3 4 5 6 x

Considere uma função $h: A \rightarrow C$ que produz os
mesmos

resultados que as funções f e g aplicadas em
sequência, ou

seja, que relaciona cada elemento de A com o
correspondente

elemento de C sem passar pelo conjunto B . Tal função
 h é

denominada função composta de f e g .

38 Coleção Estudo

Função composta e função inversa





Denotamos a função composta $h(x)$ por $g(f(x))$ ou $g \circ f(x)$.

Resolução:

Como exemplo, considere os conjuntos **a**, **B** e **C** $f(g(x))$
 $= 2g(x) + 3 = 2(x - 2) + 3 = 2x - 1$

representados a seguir e sejam as funções $f: A \rightarrow b$ e $D)$
 $g \circ f(x)$ $g: b \rightarrow C$, tais que $f(x) = x + 3$ e $g(x) = x^2 - 1$.
 vamos

Resolução:

descobrir a expressão matemática da função $g(f(x))$,
 que

relaciona os elementos de **a** com os elementos de **C**. g
 $o f(x) = g(f(x)) = f(x) - 2 = 2x + 3 - 2 = 2x + 1$

A $f: A \rightarrow B$ **B 03.** Considere as funções $f(x) = 4x + 11$ e $f(g(x))$
 $= 6x - 10$.

1 4

2 Determinar a expressão de $g(x)$. 5

3 **Resolução:** 6

4 7 Pela definição de função composta, temos que
 $f(g(x)) = 4g(x) + 11$. Igualando esse resultado com a
 expressão fornecida, temos:

$$g \circ f: A \rightarrow C \quad g: B \rightarrow C \quad 6x - 21 \quad 4g(x) + 11 = 6x - 10 \\ \Rightarrow 4g(x) = 6x - 21 \Rightarrow g(x) = 4$$

15

24 04. sejam as funções $h(x) = 5x - 3$ e $t(h(x)) = 15x + 32$.

35 Determinar a expressão de $t(x)$. **48**

Resolução:

C

$$t(h(x)) = 15x + 32 \Rightarrow t(5x - 3) = 15x + 32 \quad (I)$$

Para calcularmos a expressão da função $g(f(x))$, devemos vamos denotar $5x - 3$ por k . Assim, temos:

substituir o x na expressão de $g(x)$ por $f(x)$. $k + 3 \quad 5x - 3$
 $= k \Rightarrow x = 5$ Assim, como $g(x) = x^2 - 1$, temos:

MATEMÁTICA $g(f(x)) = f(x)^2$ substituindo na expressão (I), temos: $- 1$

Mas, $f(x) = x + 3$. Portanto, temos: $(k + 3) \quad t(k) = 15$.
 $| \quad | + 32 \Rightarrow t(k) = 3k + 9 + 32 \Rightarrow \quad g(f(x)) = g(x + 3) =$
 $(x + 3)^2 - 1 = x^2 + 6x + 9 - 1$

Assim, $g(f(x)) = x^2 + 6x + 8$. $t(k) = 3k + 41$

Observe que essa expressão realmente relaciona os
 Daí, se a expressão vale para k , a mesma também vale

elementos de **a** com os elementos de **C**. para x , ou seja, $t(x)$
 $= 3x + 41$.

• Para $x = 1$, temos $g(f(1)) = 1^2 + 6 \cdot 1 + 8 = 15$.

05. (UFU-MG) seja f uma função real de variável real definida

• Para $x = 2$, temos $g(f(2)) = 2^2 + 6 \cdot 2 + 8 = 24$.
 $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ • Para $x = 3$, temos
 $g(f(3)) = 3^2 + 6 \cdot 3 + 8 = 35$. $f(f(x)) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

• Para $x = 4$, temos $g(f(4)) = 4^2 + 6 \cdot 4 + 8 = 48$.
 Então, $f(-1)$ é igual a

A) 0

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS b) 1 C) 2

02. D) -1 sejam as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = x - 2$. Calcular: E) 3

A) $f(g(2))$ **Resolução:**

Resolução: Para $x = -1$, temos $f(-1) = f(f(1))$.

$$f(g(2)) = f(0) = 3 \text{ Mas } f(1) = 1 + 1 \Rightarrow f(1) = 2.$$

b) $f \circ g \circ g(1)$ Logo, $f(-1) = f(2)$.

Resolução: Mas $f(2) = 2 + 1 \Rightarrow f(2) = 3$.

$f \circ g \circ g(1) = f(g(g(1))) = f(g(-1)) = f(-3) = -3$ Logo, $f(-1) = 3$.

Frente C Módulo 06

06. (Mackenzie-SP) O gráfico a seguir representa uma função **02.**

(Unifor-CE) seja a função f , de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, representada no

definida em $\mathbb{R}$ por $y = f(x)$. gráfico a seguir.



–3 É **CorrEto** afirmar que

A) o conjunto imagem de f é o intervalo $]-1, +\infty[$.

–5

b) f é negativa, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $x < 3$.

O valor de $f(2) + f(f(-5))$ é igual a C) f é crescente, para todo $x \in \mathbb{R}$.

A) –2 D) f é bijetora.

b) –1 E) f é par.

C) 0

03. (UFJF-MG–2007) A seguir, encontram-se representados

D) 1 os gráficos das funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

E) 2 $y = f(x)$

Resolução: 4

Pelo gráfico, verificamos que $f(2) = -3$.

Além disso, $f(-5) = 5$.

Logo, $f(f(-5)) = f(5) = 3$.

Portanto, $f(2) + f(f(-5)) = -3 + 3 = 0$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. y (EFOA-MG) A figura a seguir representa o gráfico de uma $y = g(x)$

função f .

y

2 2

O O x 1 2 3 x

sabendo que f possui inversa f^{-1} : $\square \rightarrow \square$, o valor de

O total de elementos x tais que $f(f(x)) = 2$ é $f \circ g \circ f^{-1}(2)$ é

A) 2 A) 0

b) 4 b) 1

C) 0 C) 2

D) 3 D) 3

E) 1 E) 4

40 Coleção Estudo

Função composta e função inversa

04. (UFU-MG) Considere a função $f(x) = 2x^2 + 1$, para $x \geq 0$. **03.** (UNIFESP) Há funções $y = f(x)$ que possuem a seguinte

sendo g a função inversa de f , então, pode-se afirmar propriedade:
“a valores distintos de x correspondem

que o número real $g(f(6)) + f(g(6))$ pertence ao intervalo valores
distintos de y ”. Tais funções são chamadas

injetoras. Qual, entre as funções cujos gráficos aparecem

A) $[0, 4]$

a seguir, é injetora?

b) $[4, 13]$

A)
y

C) $[20, 36]$

D) $[36, 73]$

05. O $x \in \mathbb{R}$ (UFJF-MG) sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e sabendo-se que

o gráfico da função injetora $f: A \rightarrow A$ passa pelos pontos b) y

$(1, 3)$, $(2, 5)$ e $(3, 4)$, podemos concluir que

A) o gráfico de f passa pelo ponto $(3, 1)$.

b) a função f admite inversa. O x 1

C) a função f é crescente. C) y

D) a função f é decrescente.

E) o gráfico de f passa pelo ponto (5, 4).

O x 1

EXERCÍCIOS PROPOSTOS y D)

01. (PUC Minas) Na figura, está o gráfico da função f .

y MATEMÁTICA

4 O x 1

E)
y

1

O 1 x O x 1

O total de elementos x tais que $f(f(x)) = 4$ é **04.**
(UFC–2009) O coeficiente b da função quadrática

A) 1 $f: \square \rightarrow \square$, $f(x) = x^2 + bx + 1$, que satisfaz a condição

$$f(f(-1)) = 3, \text{ é igual a}$$

b) 2

A)
-3

C) 3

D) 4 b) -1

C)
0

02. (UEL-PR) se f e g são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que $f(x) = 2x - 1$ e $f(g(x)) = x^2 - 1$, então $g(x)$

é igual a E) 3

A) $2x^2 + 1$ **05.** (ITA-SP) Qual das funções definidas a seguir é bijetora?

b) $-x + 1$ A) f:

$$2 \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, \text{ tal que } f(x) = x^2$$

C) x^2 b) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} + 1 + \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2 +$

2

$$C) f: [1, 3] \rightarrow [2, 4], \text{ tal que } f(x) = x + 1$$

D) $x + 1$

$$1 D) f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que } f(x) = \sin x$$

E) $x +$

$$2 E) f: [0, 2] \rightarrow [0, 3], \text{ tal que } f(x) = x + 1$$

Frente C Módulo 06

06. (UFU-MG–2006) sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais **08.** (UFMG) sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ funções tais que

que $(f \circ g)(x) = 10x - 1$ e $g(x) = -5x + 2$. sabendo-se $2x + x$

$f(x) = x + 1$ e $g(x) =$. Então, pode-se afirmar que

que o gráfico de f é uma reta, assinale a única alternativa x

iNCorrEta. A) $f = g$

A) $f(3) = 2$ b) $g \circ f$ está definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ c) $(f \circ g)(x) = x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$ b) f é decrescente.

(D) $f(x) > 0$ e $g(x) > 0, \forall x > -1$)

C) $f(4) = 4$

(2) E) $f(x) < 0$ e $g(x) < 0, \forall x < -1$

D) O coeficiente angular do gráfico de f é -2 .

09. (UFRJ) seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = ax + b$.

07. (UFES) A função cujo gráfico está representado na figura Se o gráfico da função f passa pelos pontos $A(1, 2)$ e

a seguir tem inversa. $b(2, 3)$, a função f^{-1} (inversa de f) é

$$y^{-1} A) f(x) = x + 1$$

b)
f-
1(x)
=
-x

$$\begin{aligned} &+ \\ &1 \end{aligned}$$

$$\text{O C) } f^{-1}(x) = x - 1 \quad x$$

$$\begin{aligned} \text{D) } &f^{-1}(x) \\ &= \\ &x \\ &+ \\ &2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{E) } &f^{-1}(x) \\ &= \\ &-x \\ &+ \\ &2 \end{aligned}$$

O gráfico de sua inversa é

A) y **10.** (FEI-sP) se $f(2x + 3) = 4x^2 + 6x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} &f(1 - x) \\ &\text{vale} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{A) } &2 - x^2 \end{aligned}$$

$$\text{O x 2 b) } 2 + x$$

$$\begin{aligned} \text{C) } &x^2 \\ &+ \\ &2x \\ &- 4 \end{aligned}$$

b) y^2 D) $3x - 2x + 4$

E)
 x^2
 $+$
 $x -$
 1

O x

11. (UFU-MG-2009) sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções
 cujos gráficos estão esboçados a seguir:

C) y

y
 g

O x 6

4
 2

D) y

O 2 4 x

f

O x

Definindo $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $h(x) = f(x) - g(x)$, é **CorrEto** afirmar que

E) y

A)
 $(f$
 o
 $h)$
 (4)
 $=$
 $g-$

O b) a função **h** nunca se anula.

x

C)
(f
o
h)
(0)
=
(g
o
h)
(0).

D) **h** é crescente no intervalo $]-\infty, 2]$.

42 Coleção Estudo

Função composta e função inversa

12. (Cesgranrio) Com a função $f(x)$, representada no gráfico **15.** (UFU-MG–2008) sejam **f** e **g** duas funções reais definidas

a seguir, e com a função $g(x)$, obtém-se a composta para todo número real. se **f** é dada por $f(x) = 2x + 1 - 3$

$g(f(x)) = x$. A expressão algébrica que define $g(x)$ é e a função composta $f \circ g$, por $(f \circ g)(x) = x^2 + 1$, então

y o valor de $g(-2) \cdot g(2)$ é igual a

A)
4

b)
8

O 1 x D) 32 4

–1 **16.** (UFU-MG–2006) seja f a função real de variável real cujo

gráfico está representado na figura a seguir. Sejam

g a função inversa de f e h a função definida por

A) x 1 $h(x) = -g(-x)$. Assinale a alternativa que corresponde ao –
– 4 4 gráfico da função h .

b) x 1 y

– +

4 4

C) + x 1 4 O α 4 1

D) $x^2 - 1$

$4x^2$

$x^2 + y^2$

E) $x^2 + 1$

4 MATEMÁTICA

α

13. (UFJF-MG-2007) seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = ax - 8$

e tal que $f(f(1)) > 1$. O **MENor** valor inteiro positivo 1
possível para a é O 1 x

A) um número ímpar.

b) um número primo. y b)

C) um múltiplo de 3.

D) um múltiplo de 5. O α

E) um múltiplo de 7. $-1 \leq x$

14. (UFTM-MG-2008) As retas r e s são simétricas com

relação à reta $y = x$. se a equação de r é $y = ax + b$, C) y
com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então a equação de s é

$$A) y = x + 1 + b \text{ a } 1 \alpha O x x b) y = - + b a$$

$$x D) y$$

$$C) y = - - b$$

$$a$$

$$D) y = x O b + 1 x -1 a a$$

$$E) y = - \alpha x b$$

$$a a$$

Editora Bernoulli **43**

Frente C Módulo 06

SEÇÃO ENEM 02. Uma das etapas da implementação de uma rotina de

programação de computadores consiste na determinação

01. de um parâmetro ϕ . Esse parâmetro é obtido da

A figura a seguir indica as trajetórias de dois robôs,

seguinte
forma:

sojourner e Opportunity, utilizados pela Agência Espacial

- Um dado de entrada x é inserido no programa.

Americana no projeto de exploração científica do planeta

•
Multiplique
se
x
por
8.

Marte. Considere que os dois robôs tenham partido,

• Adiciona-se 11 ao resultado anterior.

simultaneamente, de pontos distintos da superfície de

Marte, com a mesma velocidade e em trajetória retilínea, Em uma etapa subsequente, o programador calcula

em uma missão de exploração. Cada um dos robôs é um parâmetro σ , utilizando o valor de ϕ calculado

controlado por um operador na Terra. anteriormente, do seguinte modo:

• Adiciona-se 13 ao valor de ϕ .

Ponto de

Norte partida • Eleva-se o valor obtido ao quadrado.

(Robô Um programador decidiu determinar o parâmetro σ Sojourner)

em uma única etapa, a partir do dado de entrada x .

Nordeste

A expressão matemática correspondente a essa operação é

Ponto de

partida A) $\sigma = 64(x_2 + 6x + 9)$ (Robô

Opportunity) b) $\sigma = 64(x_2 + 11x + 13)$

C)

$$\sigma = 64(x_2 + 9)$$

Oeste O D) $\sigma = 64(x_2 - 3x + 12)$ Leste

$$\begin{aligned} & \text{E)} \\ & \sigma = 64(4x_2 + 6x + 9) \end{aligned}$$

GABARITO

Sudoeste Sul Fixação

01. D 02. A 03. E 04. b 05. b

sabe-se que o robô sojourner intercepta a linha norte-sul

a 4 km ao norte do ponto de referência o, e intercepta

Propostos

a linha leste-oeste a 2 km a oeste desse mesmo ponto

01. C 09. C

de referência. Considerando-se que a trajetória do robô

Opportunity seja simétrica à trajetória do robô sojourner 02. C 10. E

em relação à linha sudoeste-nordeste, e que não ocorram 03. E 11. C

imprevistos que atrasem os robôs, pode-se afirmar que

04. D 12. C

os mesmos irão se encontrar a, aproximadamente,

(05. C 13. D Considere: $^12 \approx 1,4$)

06. C 14. E

A) 1,4 km do ponto o.

07. D 15. A

b) 2,8 km do ponto o.

08. E 16. D

C) 4,2 km do ponto o. **Seção Enem**

D) 5,6 km do ponto o.

01.

D

02.

A

E) 7,0 km do ponto o.

44 Coleção Estudo MATEMÁTICA

MÓDULO FRENTE Polígonos 05 D

POLÍGONO POLÍGONO CONVEXO

Um polígono é uma figura geométrica plana formada
Observe que a reta r que contém o lado AB do
hexágono

por segmentos de reta (não colineares dois a dois), tais
a seguir isola em um mesmo semiplano todos os
demais

que cada extremidade de qualquer um deles é comum
a lados do hexágono.

apenas um outro. E D

A seguir, temos um polígono com seis lados
(hexágono)

e seus principais elementos: C F

C vértice

lado B A r

B

O mesmo acontece com as retas que contêm qualquer

A ângulo interno D um dos outros lados. Por isso, dizemos
que esse hexágono

diagonal é convexo.

ângulo externo Um polígono é **convexo** se, e somente se, as
retas que

contêm qualquer um de seus lados deixam todos os
demais

F E

lados contidos em um mesmo semiplano.

A tabela a seguir mostra os nomes que recebem os
Observando o polígono ABCDEFG, constatamos que
ele não

polígonos, conforme o seu número **n** de lados (ou de
vértices). é convexo, pois a reta **r** que contém o lado
AB não deixa os

demais lados contidos em um mesmo semiplano. O
polígono

que não é convexo é denominado polígono **côncavo**.

(Nº de vértices) Nome do polígono Nº de lados

C D

3 Triângulo A

4 G B Quadrilátero

5 Pentágono

6 E Hexágono F

7 Heptágono

8 Octógono **POLÍGONO**
REGULAR

9 Eneágono Um polígono convexo que possui todos os
lados congruentes

entre si (equilátero) e todos os ângulos internos

10 Decágono

entre si (equiângulo) é chamado de **polígono regular**.

11 Undecágono

12 Dodecágono Triângulo regular

(triângulo equilátero)

15 Pentadecágono

20 Hexágono regular Icoságono

Quadrilátero regular

Aos demais polígonos, não daremos nomes especiais,
(quadrado)

referindo-nos a eles explicitando o seu número de
lados.

Editora Bernoulli 45

Frente D Módulo 05

DIAGONAIS E SOMA DOS
Triângulo equilátero

ÂNGULOS INTERNOS E

EXTERNOS A medida da altura h de um triângulo equilátero de lado l

se um polígono tem n lados, $n \geq 3$. Como no triângulo equilátero as alturas estão $2 \geq 3$, então $n(n-3)/2$ contidas nas mediatrizes e coincidem com as bissetrizes $d = n(n-3)/2$ ele possui diagonais. e com as medianas, temos que o ponto comum às alturas 2 é circuncentro (centro da circunferência circunscrita),

A soma das medidas dos ângulos internos é, também, incentro (centro da circunferência inscrita) e,

de um polígono convexo de n lados é $s = (n-2)180^\circ$ também, é baricentro (divide cada mediana na razão 2

$(n-2)180^\circ$. para 1).

de um polígono convexo é 360° . $s = 360^\circ \cdot 2$. h R A soma das medidas dos ângulos externos

3

h

CIRCUNFERÊNCIAS

CIRCUNSCRITA E INSCRITA EM

POLÍGONOS REGULARES

Raio r da circunferência circunscrita:

(aquela que passa por todos os vértices do polígono) e a circunferência inscrita (aquela que tangencia todos os lados).

Todo polígono regular admite a circunferência circunscrita e a circunferência inscrita.

Se R é o raio da circunferência circunscrita e r é o raio da circunferência inscrita, temos:

$$R = \frac{l}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \quad r = \frac{l}{2 \tan \frac{\alpha}{2}}$$

onde l é o comprimento do lado e α é o ângulo interno do polígono.

Essas duas circunferências têm o mesmo centro O , chamado também de centro do polígono regular.

Vamos estudar o cálculo das medidas dos raios das circunferências circunscrita e inscrita em alguns polígonos regulares.

Ao raio da circunferência inscrita em um polígono regular,

damos o nome de apótema.

Quadrado

Raio r da circunferência inscrita:

A medida da diagonal de um quadrado de lado l é $l\sqrt{2}$.

Portanto, temos: $111313r_r = .h \Rightarrow = r. \Rightarrow = 332$
6

O R Hexágono regular

R Os vértices de um hexágono regular dividem a
circunferência

circunscrita em seis arcos congruentes; logo, cada um
desses



Raio r da circunferência circunscrita: $12R =$ arcos
mede 60° . Assim, o ângulo central correspondente a
cada um desses arcos também mede 60° .

2

C

r B D

R

O

r 60° O

R

A E



Raio r da circunferência inscrita (apótema):



$$r = 1$$



$$2 F$$

46 Coleção Estudo

Polígonos

Como $AO = Ob$ e $AOB = 60^\circ$, temos que $OAb = OBA = 60^\circ$ e,

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

portanto, o triângulo AOb é equilátero. sendo l a medida

do lado desse hexágono, concluímos que o raio r da

01. (UNITAU-sP) O polígono regular convexo em que o circunferência circunscrita é: número de lados é igual ao número de diagonais é o

A) dodecágono. D) hexágono.

$R = l$ b) pentágono. E) heptágono.

vamos analisar o caso em que a circunferência está inscrita C) decágono.

em um hexágono regular. **02.** (PUC Rio) Os ângulos internos de um quadrilátero medem

A) $3x - 45$, $2x + 10$, $2x + 15$ e $x + 20$ graus. O **MENor**

ângulo mede

r

A) 90° D) 105°

b) 65° E) 80°

F) C

O) C) 45°

03. (UFSCar-SP) A figura 1 representa um determinado

encaixe no plano de 7 ladrilhos poligonais regulares

E) D (1 hexágono, 2 triângulos, 4 quadrados), sem

Como r é a medida da altura de um triângulo equilátero sobreposições e sem cortes.

de lado l , então o raio r da circunferência inscrita (apótema) mede:


$$r = \frac{13}{2}$$

ÂNGULOS EM POLÍGONOS

Figura 1

MATEMÁTICA

Figura 2

REGULARES

Em relação aos 6 ladrilhos triangulares colocados

perfeitamente nos espaços da figura 1, como indicado

Ângulo cêntrico

na figura 2, é **Correto** dizer que

A) 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos

Todos os ângulos cêntricos de um polígono regular são isósceles de ângulo da base medindo 15° .

congruentes. Então, a medida de cada um deles é dada por: b) 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos

isósceles de ângulo da base medindo 30° .



C) 2 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo

a $360^\circ = 50^\circ$ e 4 são triângulos isósceles de ângulo da base

n

medindo 30° .

Ângulo interno D) 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos retângulos isósceles.

Como o polígono regular possui os **n** ângulos congruentes, E) 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos a medida de cada um deles é dada por: escalenos.

S **04.** (Mackenzie-SP) Os ângulos externos de um polígono



$$a = \frac{(n - 2) \cdot 180}{n}^\circ$$



regular medem 20° . Então, o número de diagonais desse

n n

polígono
é

Ângulo externo A) 90 D) 135

b) 104 E) 152

Como todos os ângulos externos são congruentes, c)
119

a medida de cada um dos n ângulos externos é dada por:

05. (UFU-MG) sabendo-se que um polígono regular de n lados



a S está inscrito num círculo de raio 1 e que o polígono possui $360^\circ = e = e$ 9 diagonais, ENCoNtrE a medida do comprimento de n n

seu
lado.

Editora Bernoulli 47

Frente D Módulo 05

EXERCÍCIOS PROPOSTOS **07.** (UFES) Um polígono regular possui, a partir de cada um de seus vértices, tantas diagonais quantas são as diagonais **01.** (PUC Rio) Um polígono regular de n lados tem de um hexágono. Cada ângulo interno desse polígono

90 diagonais. O valor de n é mede, em graus,

A) 10 b) 12 C) 15 D) 20 E) 21 A) 140 D) 160

02. b) 150 E) 170 (Cesgranrio) se um polígono convexo de n lados tem

C)
155

54 diagonais, então n é

A) 8 b) 9 C) 10 D) 11 E) 12 **08.** (FUVEST-SP) Na figura a seguir, ABCDE é um pentágono

03. regular. A medida, em graus, do ângulo α é

(UFJF-MG) Prolongando-se os lados Ab e CD de um A polígono convexo regular AbCD..., obtém-se um ângulo de 132° conforme ilustra a figura. De acordo com o número α de lados, esse polígono é um B E

A 132° B

C

C D

D A) 32 b) 34 C) 36 D) 38 E) 40

09. (Unifor-CE-2007) Os lados de um octógono regular são prolongados até que se obtenha uma estrela. A soma das

A) octógono. D) pentadecágono.

medidas dos ângulos internos dos vértices dessa estrela é

b) decágono. E) icoságono.

A) 180° b) 360° C) 540° D) 720° E) 900°

C) undecágono.

10. (Mackenzie-SP) Na figura, ABCDE é um pentágono regular,

04. (Unificado-RJ) ABCDE é um pentágono regular convexo.

EF é paralelo a AB e BF é paralelo a AE. A medida do

O ângulo das diagonais AC e AD vale

ângulo
 α é

A) 30° b) 36° C) 45° D) 60° E) 72° A

05. (PUC-SP) A figura mostra um hexágono regular de lado **a**.

A diagonal AB mede E B α

B

F

A

D C

A) 72° D) 76°

A) $2a$ D) a b) 54° E) 36°

b) 2 c) 60° a) 2 E) 3 **11.** (ITA-sP) De dois polígonos convexos, um tem a mais que a 3 C) o outro 6 lados e 39 diagonais. Então, a soma total dos 2

números de vértices e de diagonais dos dois polígonos

06. (UFES) Na figura, as retas **r** e **s** são paralelas. A soma é igual a

$\alpha + \beta + \gamma + \delta$ dos ângulos indicados na figura é A) 63 b) 65 C) 66

D) 70 E) 77

α r

12. (UFU-MG) Considere um polígono regular de n lados,

γ circunscrito a um círculo de raio 1 cm. O valor de n , para

δ que o lado desse polígono tenha medida 2 cm, é igual a

A) 8 b) 6 C) 5 D) 4

s

A) 180° D) 480° **13.** (PUC-sP) Cada ângulo interno de um decágono regular

b) 270° E) 540° mede

C) 360° A) 36° b) 60° C) 72° D) 120° E) 144°

48 Coleção Estudo

Polígonos

14. (UEL-PR) se um círculo de 5 cm de raio está inscrito

SEÇÃO ENEM

em um hexágono regular, o perímetro do hexágono,

em centímetros, é igual a **01.** (Enem-2002) Na construção civil, é muito comum

A) 20 ¹3 D) 12¹3 a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de

b) 18 ¹/₃ E) 9 ¹/₂ polígonos para o revestimento de pisos ou paredes.

C) 15 Entretanto, não são todas as combinações de polígonos ¹/₂

que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem

15. (UFsCar-sP) Um polígono regular com exatamente que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como

35 diagonais tem ilustram as figuras:

A) 6 lados. D) 12 lados.

b) 9 lados. E) 20 lados.

C) 10 lados.

16. (Unicamp-sP) O polígono convexo cuja soma dos ângulos

internos é $1\,440^\circ$ tem, exatamente,

A) 15 diagonais. D) 30 diagonais.

b) 20 diagonais. E) 35 diagonais.

C) 25 diagonais. *Figura 1: Ladrilhos retangulares que pavimentam o plano.*

17. (FUvEsT-sP) Dois ângulos internos de um polígono

convexo medem 130° cada um e os demais ângulos

internos medem 128° cada um. O número de lados do

polígono é

A) 6 b) 7 C) 13 D) 16 E) 17

18. (vUNEsP) A distância entre dois lados paralelos de um

MATEMÁTICA

hexágono regular é igual a $2\sqrt{3}$ cm. A medida do lado desse hexágono, em centímetros, é

A) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $2,5$ d) 3 e) 4

Figura 2: Heptágonos regulares não pavimentam o plano

19. (há falhas ou superposição). (Unifor-CE) A figura a seguir é formada por losangos,

todos congruentes entre si. A medida x do ângulo

assinalado é A tabela traz uma relação de alguns polígonos regulares,

com as respectivas medidas de seus ângulos internos.

Nome	Triângulo	Quadrado	Pentágono	Hexágono	Octógono	Eneágono
------	-----------	----------	-----------	----------	----------	----------

x

Figura

interno	60°	90°	108°	120°	135°	144°	Ângulo
---------	------------	------------	-------------	-------------	-------------	-------------	--------

A) 100° b) 90° c) 80° d) 70° e) 60° se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois

20. tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos da tabela,

(UFsC–2006) Considere um hexágono equiângulo (ângulos

sendo um deles octogonal, o outro tipo escolhido deverá

internos iguais) no qual quatro lados consecutivos medem

20 cm, 13 cm, 15 cm e 23 cm, conforme figura a seguir. ter a forma de um

Calcule o perímetro do hexágono. A) triângulo.

E 20 D

13 b) quadrado.

C C) pentágono.

F

15 D) hexágono.

A 23 B E) eneágono.

Editora Bernoulli **49**

Frente D Módulo 05

02. As aranhas são notáveis geômetras, já que suas teias

revelam variadas relações geométricas. No desenho,

GABARITO

a aranha construiu sua teia de maneira que essa é

formada por hexágonos regulares igualmente espaçados.

A aranha anda sobre o fio de sua teia e percorre 2 cm a

Fixação

cada meio segundo. Qual é o menor tempo que a aranha

deve gastar, andando ao longo da teia, para alcançar o

01.
b

infeliz inseto, que permanece imóvel?

02.
b

03.
D

8 cm 04. D

2 cm

05.
1

A) 1,5 segundo D) 3,0 segundos **Propostos**

b) 2,0 segundos E) 6,0 segundos 01. C

C) 2,5 segundos

02.
E

03. Rolamento é um tipo de rolete usado para reduzir o atrito nas partes móveis de uma máquina. Como exemplo, 03. D podemos citar o eixo e a roda de carros, motos, bicicletas

04.
b

e outros. Observe a figura a seguir:

05.
D

As esferas são separadas

por um espaçador 06. E

07.

b

Quando a roda gira em torno do seu eixo, as esferas giram 08. C dentro do rolamento, em torno de seu centro, reduzindo, assim, o atrito entre eles. Observe, na ilustração a seguir, 09. D o polígono regular formado pelos centros das esferas. 10. A sabe-se que todas as esferas possuem o mesmo raio (r) e são igualmente espaçadas. Na confecção do rolamento, 11. b podemos afirmar que

12.

D

Os espaços entre as esferas

estão representados por r 13. E

r

$C_1 r C_2$ 14. A $r C_3$ 15. C

a

C_3 16. E $O \alpha$

$n-1$

17.

b

18.

b

A) o ângulo 19. C α formado para um rolamento de exatamente

8 esferas é de $22,5^\circ$.

20.
99
cm

b) para um rolamento de exatamente 8 esferas, o valor

de **a** mede 2r. **Seção Enem**

C) o polígono formado pelos centros das esferas possui soma dos ângulos internos igual a $1\ 800^\circ$, quando o rolamento possui exatamente 10 esferas. 01. b

D) para um rolamento de exatamente 6 esferas, o valor de **a** mede 2r. 02. C

E) no rolamento de 6 esferas, o ângulo central 03. D mede 90° .

50 Coleção Estudo MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE Ângulos na circunferência 06 D

chama-se circunferência de centro **C** e raio **r** o conjunto dos pontos do plano α que distam de **C** a medida **r**. e sabe-se, hoje, que essa constante é um número irracional,

isto é, tem infinitas casas decimais e não é periódica:

Ponto exterior

$$C \text{ à circunferência} = 3,14159265... p$$

Ponto pertencente

r à circunferência C Da sentença $= p$, conclui-se que:

Ponto interior $2r$

à circunferência

A reunião de uma circunferência com o conjunto de seus $C = 2pr$

pontos interiores é chamada de **círculo**.

Portanto, o perímetro de uma circunferência é igual
ao

Círculo produto da medida
do diâmetro por p .

C

r

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE

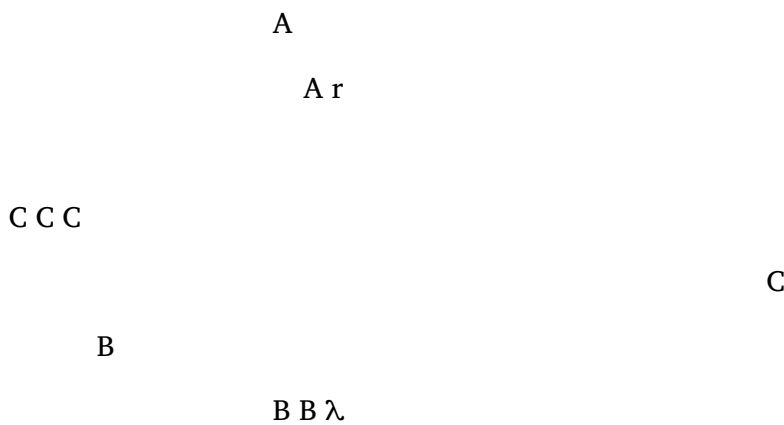
Arcos e cordas RETA E CIRCUNFERÊNCIA

Dois pontos **a** e **B** de uma circunferência dividem-na em Uma reta **r** e uma circunferência λ , contidas em um mesmo

duas partes chamadas **arcos**. O segmento de reta AB plano, admitem as seguintes posições relativas: é

chamado de **corda**. Uma corda que passa pelo centro **C** da **Exterior** circunferência é chamada de **diâmetro**.

A **r** é exterior a λ quando não há ponto comum entre elas.



Secante

PERÍMETRO DA CIRCUNFERÊNCIA Uma secante a uma circunferência é uma reta que

intercepta a circunferência em dois pontos distintos.

Todas as circunferências são semelhantes entre si.

Por isso, a razão entre a medida C do comprimento A_r (perímetro) de uma circunferência e a medida $2r$ de seu

B

diâmetro é constante, isto é:

C



C



$= \text{constante}$

$2r$

Dizemos que a reta e a circunferência são secantes.

Editora Bernoulli 51

Frente D Módulo 06

Propriedades da secante Uma interna à

outra: quando todos os pontos de uma delas são internos à outra. A B M

s

r r

C C d

$1\ 2\ C$

$\lambda_1\ \lambda_2$

λ

i) se uma reta **s**, secante a uma circunferência λ (C, r), **secantes:** quando têm exatamente dois pontos distintos

intercepta λ em dois pontos distintos **a** e **B** e se em comum. **M** é o ponto médio da corda AB, então a reta CM é perpendicular à secante **s** (ou perpendicular p

ii) à corda AB). d C se uma reta **s**, secante a uma circunferência λ (C, r), $2\ C_1$ intercepta λ em dois pontos distintos **a** e **B**, então $\lambda_1\ Q\ \lambda_2$ a reta perpendicular à **s**, conduzida pelo centro **C**,

passa pelo ponto médio da corda AB. **tangentes:** quando têm um único ponto em comum.

Tangente

intercepta a circunferência num único ponto,
denominado **T**. Uma tangente a uma circunferência é
uma reta que tangencia a circunferência em um único ponto de tangência t .
Sejam C_1 e C_2 duas circunferências com centros λ_1 e λ_2 e raios r_1 e r_2 .

T Em duas circunferências tangentes, os centros C e C
 e o ponto de tangência t são colineares.

C **Coincidentes:** quando possuem todos os seus pontos
em
comum.

λ

Propriedade da tangente

Uma reta é tangente a uma circunferência se, e somente se, é tangente à
circunferência. Toda reta é perpendicular a um raio na
extremidade da circunferência. $C_1 \equiv C_2$, $\lambda_1 \equiv \lambda_2$, $r_1 \equiv r_2$.

t

QUADRILÁTEROS

CIRCUNSCRITÍVEIS E

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE Segmentos tangentes DUAS CIRCUNFERÊNCIAS λ INSCRITÍVEIS

se de um ponto P conduzimos os segmentos PA e PB ,

Duas circunferências λ e C e de raios r_1 e r_2 , de centros C_1 e C_2 ambos tangentes a uma circunferência, com A e B na

circunferência λ , contidas em um mesmo plano, admitem as posições relativas a seguir:

Externas: quando todos os pontos de qualquer uma delas

são externos à outra. A

d

$r_1 r_2 C_1 P_2$

$C_1 C$

2

$C_1 B \lambda_1 \lambda_2$

Ângulos na circunferência

Quadrilátero circunscrito Define-se a medida, em graus, de um arco de circunferência como sendo a medida do ângulo central que o determina.

Um quadrilátero convexo é circunscrito a uma circunferência **Exemplo:**

se, e somente se, seus quatro lados são tangentes à A circunferência.

$$\widehat{C} 60^\circ m(ACB) = m(\widehat{A'B}) = 60^\circ$$

D

A

B

o Ângulo inscrito em uma

C

circunferência

B

Todo ângulo cujo vértice pertence a uma circunferência e



A soma de dois lados opostos é igual à soma dos os lados são secantes a ela é chamado de **ângulo inscrito**



outros dois. dessa circunferência.

A

Quadrilátero inscrito $\vee \alpha = \hat{\text{Ângulo inscrito}} \alpha A$
B = Arco determinado

1

pelo ângulo inscrito

Um quadrilátero convexo é inscritível se, e somente se,

tem os vértices numa circunferência. B

D

A medida do ângulo inscrito é metade da medida

do ângulo central correspondente. **MATEMÁTICA**

A

O C Demonstração:

B Traçando o ângulo central β e o diâmetro VD passando

por C,
temos:



Os ângulos opostos são suplementares. A A



V
V
 α
 α
 β
C
 β
e
C
D

ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA_B

Ângulo central de uma Observe que os

triângulos CvA e CvB são isósceles,

circunferência portanto, $CVA = CA_v$ e $CVb = CB_v$.

No triângulo CvA, ACD é ângulo externo, assim

é chamado de **ângulo central** dessa circunferência.

Todo ângulo cujo vértice é o centro de uma

circunferência $\angle ACD = \angle CVA + \angle CA_v = 2 \cdot \angle CVA$

$\Rightarrow \angle CVA = \frac{\alpha}{2}$

No triângulo CvB, bCD é ângulo externo, assim:

$$\angle ACD = \angle CVb + \angle CB_v$$

$$= 2 \cdot \angle CVb \Rightarrow \angle CVb = \frac{\alpha}{2} = \text{Ângulo}$$

central $\angle ACD = \alpha$ Como $\angle A^1B = \text{Arco}$

determinado $\alpha = \angle CVA + \angle CVb = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$

pelo ângulo central

$$\alpha = \angle ACD + \angle bCD \Rightarrow$$

B 2



$$\alpha = \angle A^1B = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}$$





Frente D Módulo 06

Ângulo de segmento Exterior

Todo ângulo cujo vértice pertence a uma circunferência, se o vértice de um ângulo é exterior à circunferência e seus

sendo um lado tangente e o outro secante à circunferência, lados são secantes a ela, esse ângulo é chamado **ângulo**

é chamado de **ângulo de segmento**.

excêntrico exterior.

C

A medida de um ângulo excêntrico exterior é igual

β à semidiferença das medidas dos arcos que ele

$V \propto A$ intercepta.

B

A

Um ângulo de segmento e um ângulo central que determinam o mesmo arco são chamados de **ângulos D correspondentes** dessa circunferência. $P \propto O$



A medida do ângulo de segmento é metade da medida C



do ângulo central correspondente. B



Demonstração:

$$C \propto AB \quad CD \quad \square \square - = 2$$

β

V α A RELAÇÕES MÉTRICAS NA

B

O ângulo CVA é complementar de AVb.

CIRCUNFERÊNCIA

Logo, $m(\text{CVA}) = 90^\circ - \alpha$.

Como o triângulo CvA é isósceles, pois $CV \equiv CA$,

então **Ponto interior à circunferência**

$\text{CVA} = \text{CAV} = 90^\circ - \alpha$. Assim, pela soma dos ângulos internos do DCvA: se, em uma circunferência, duas cordas AB e CD

$\beta + 90^\circ - \alpha + 90^\circ - \alpha = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha = \beta \Rightarrow$
concorrem em um ponto P, então:



$$\alpha \beta = 2$$

$$PA.Pb = PC.PD$$

Ângulo excêntrico

Interior A A

C C

se o vértice de um ângulo é interior à circunferência e não

coincide com o centro da mesma, esse ângulo é chamado **ângulo excêntrico interior**. D D



A medida de um ângulo excêntrico interior é igual à B B



semisoma das medidas dos arcos interceptados por



Demonstr



ele e por seu oposto pelo vértice.

Observe que os triângulos APC e DPb são semelhantes,

A

D pelo caso AA (PAC e PDb são ângulos inscritos que



P α $\square$ $\square$ determinam o mesmo arco, e APC e DPb são opostos pelo AB CD + = O α vértice). Assim, temos a proporção: 2



$$C \text{ PA } PC \text{ PA.Pb} = PC.PD = \Rightarrow B \text{ PD } PB$$





Ângulos na circunferência

Ponto exterior à circunferência EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

i) se duas retas secantes Ab e CD , concorrentes em P ,
01. (UFMG) Observe a figura.

interceptam uma circunferência em a , B , C e D , s
conforme a figura a seguir, então: 45°

18°



$$PA \cdot Pb = PC \cdot PD \quad 38^\circ P$$

B suponha que as medidas dos ângulos $\widehat{PSQ}$, $\widehat{QSR}$, $\widehat{B}$

$\widehat{ASPR}$, assinalados na figura, sejam 45° , 18° e 38° ,

$\widehat{POO}$ respectivamente. A medida do ângulo $\widehat{PQS}$, em graus, é

C A) 38 b) 63 C) 79 D) 87 C

D D

02. (Mackenzie-SP) Na figura a seguir, sabe-se que $\widehat{CAD} = 20^\circ$

Demonstração:

e $\widehat{CED} = 70^\circ$. Então, $\widehat{AMB}$ é igual a

Observe que os triângulos $\triangle PAD$ e $\triangle PCB$ são semelhantes, $\widehat{BAC}$

pelo caso AA ($\widehat{APC}$ é ângulo comum aos dois triângulos,

e $\widehat{PBO}$ e $\widehat{PDA}$ são ângulos inscritos que determinam o mesmo

arco). Assim, temos a proporção: E

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

MATEMÁTICA

M

ii) se uma reta secante Ab e uma tangente PT , $\widehat{A} = 50^\circ$
C) 60° E) 30°

concorrentes em P , interceptam uma

circunferência b) 45° D) 22°30'

em **a**, **B** e **t**, conforme a figura a seguir, então: **03.**

(UFES) Na figura, os segmentos de reta AP e DP são

tangentes à circunferência, o arco A**f**bC mede 110 graus



$$(PT) = PA.Pb$$

2 e o ângulo CAD mede 45 graus. A medida, em graus,

do
ângulo
APD
é

A

B

A P B B A

P P C C C

D

T A) 15 b) 20 C) 25 D) 30 E) 35 T

Demonstração: 04. (FUVEST-SP) O raio da circunferência da figura é 2,5 cm.

AT = 6 cm (**t** é o ponto de tangência). Então, Ab = x

Observe que os triângulos PAT e PTb são triângulos
vale, em centímetros,

semelhantes, pelo caso AA ($\widehat{AP} \widehat{T}$ é um ângulo comum aos

dois triângulos; e $\widehat{Pb} \widehat{T}$, inscrito na circunferência, e $\widehat{PT} \widehat{A}$,

ângulo de segmento, determinam o mesmo arco).

Assim, $\frac{x}{B} = \frac{O}{A}$

temos a proporção: 6 cm

$$\frac{PA}{9} = \frac{PT}{3} = \frac{PB}{3,5} = \frac{PT}{4} \Rightarrow (PT)_2 = \frac{PA \cdot PB}{PT \cdot A} = 2 \text{ b)}$$

Editora Bernoulli **55**

Frente D Módulo 06

05. (Cesgranrio) Na figura a seguir, $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm, **03.** (UFMG) Observe a figura.

$AD = 4$ cm e o ponto **O** é o centro da circunferência. A

O perímetro do triângulo AOC mede, em cm,

B

D E

O D A C

B Nessa figura, BD é um diâmetro da circunferência

$\widehat{C} \widehat{A} \widehat{C}$ circunscrita ao triângulo $\widehat{AbC}$, e os

ângulos $\widehat{A bD}$ e $\widehat{A ED}$

medem, respectivamente, 20° e 85° . Assim sendo,

A) 36° b) 45° C) 48° D) 50° E) 54° o ângulo $\widehat{C bD}$ mede

A) 25° B) 35° C) 30° D) 40°

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 04. (UFJF-MG)

De um ponto M , exterior a um círculo de

centro O , traçam-se as tangentes MA e Mb , de acordo com

a figura a seguir. Se a corda AB é um lado do triângulo

01. (UFU-MG) Uma escola resolveu construir uma pista de equilátero inscrito nesse círculo, então a medida do

atletismo em suas dependências. Essa pista deverá ser ângulo $\widehat{AMB}$ é

construída a partir de um retângulo de lados $4R$ e $2R$

com uma semicircunferência em cada extremidade, A

conforme mostra a figura a seguir. As raias terão 1 metro

M

de largura.

O

B

$4R$

$2R$

A) 40° B) 60° C) 90° D) 120°

1 m (FUvEsT-sP) Um arco de circunferência mede 300° , **05.**

e seu comprimento é 2 km. Qual o número inteiro **Mais**

Em qual intervalo, **r** (em metros) deverá ser escolhido **Próximo** da medida do raio em metros?

para que o circuito, em negrito na figura, tenha A) 157 b) 284 C) 382 D) 628 E) 764

600 metros de comprimento?

06. (PUC Minas) O ângulo **x**, na figura a seguir, mede

Observação: Utilize $p = 3,14$

A) (41, 42) 45°

b) (40, 41)

x

C) (42, 43)

35°

D) (39, 40)

A) 60° b) 80° C) 90° D) 100° E) 120°

02. (UFPE) Na figura a seguir tem-se um círculo de raio 1;

sobre este círculo, consideram-se arcos A **07.**

(UFCE) Duas tangentes são traçadas a um círculo de um ¹ b e C ¹ D medindo

π ponto exterior **a** e tocam o círculo nos pontos **B** e **C**, π

6 e , respectivamente (ambos orientados no sentido respectivamente.

Uma terceira tangente intercepta o 9

anti-horário). se segmento AB em **P** e AC em **r** e toca o círculo em **Q**. α é a medida, em radianos, do ângulo

$\hat{A} = 144^\circ$ (se $Ab = 20 \text{ cm}$, então o perímetro do triângulo APR , $\angle Ob$, **Calcule** α . em cm, é igual a π) B

$B P$

O

C

Q

$A A R C$

D

O A) 39,5 b) 40 C) 40,5 D) 41 E) 41,5

56 Coleção Estudo

Ângulos na circunferência

08. (UFU-MG) Em um dado triângulo retângulo inscrevemos **14.** (Fatec-SP) Na figura a seguir, o triângulo APB está inscrito

uma circunferência de diâmetro d e circunscrevemos na circunferência de centro C .

outra de diâmetro D . O perímetro do triângulo vale P

A) $d + D$ C) $d + 2D$ E) $2(d + D)$ x

09. b) $2d + D$ 3 C) $D) (d + D)^2$ $23^\circ 45'$ $\hat{A} B$ (FUvEsT-sP) A medida do ângulo $A DC$ inscrito na $66^\circ 15'$ circunferência de centro O é

C

D

se os ângulos assinalados têm as medidas indicadas,

A 35° então x é igual a B

O A) $23^\circ 45'$ D) $62^\circ 30'$

b) 30° E) $66^\circ 15'$

C)
 60°

A) 125° D) 100°

b) 110° E) 135° **15.** (FUvEsT-sP) Os pontos **a**, **B** e **C** pertencem a uma

C) 120° **circunferência** γ e AC é lado de um polígono regular

inscrito em γ . sabendo-se que o ângulo $\widehat{AbC}$ mede 18° ,

10. (PUC) Na figura a seguir, o triângulo ABC é isósceles e BD podemos concluir que o número de lados do polígono é

é a bissetriz do ângulo de vértice **B**. A medida do ângulo igual a assinalado é A

A γ

θ 35° D C

B

B MATEMÁTICA C A) 5
b) 6 C) 7 D) 10 E) 12

A) 55° b) 50° C) 45° D) 40° E) 35° **16.** (UNESP) seja ABCD um retângulo cujos lados têm as

11. seguintes medidas: $AB = CD = 6$ cm e $BC = DA = 1,2$ cm. (UECE) Na figura, a reta MN é tangente à circunferência

em P, a secante MQ passa pelo centro O da circunferência se M é o ponto médio de AB, então o raio da circunferência

e a medida do ângulo $\widehat{Q}$ determinada pelos pontos C, M e D mede MP é 40° . A medida do ângulo

$\widehat{N}$ A) 4,35 cm. D) 5,34 cm. PQ é igual a

M P N b) 5,35 cm. E) 4,45 cm.

C)
3,35
cm.

O AE 1 **17.** (UEBA) Na figura a seguir são dados $\angle A = 60^\circ$, $BE = 8$ cm $QC = 3$

e $ED = 6$ cm. O comprimento de AC, em cm, é

A) 65° B) 60° C) 55° D) 50°

12. C (Cesgranrio) Em um círculo de raio 5, está inscrito um quadrilátero ABCD. sobre a soma dos ângulos opostos B

E

BAD e BCD podemos afirmar que vale

A) 5.180° D) 180° D A B) 3.180° E) 90°

C) 2.180° A) 10 b) 12 C) 16 D) 18 E) 20

13. (ITA-sP) Numa circunferência, inscreve-se um quadrilátero **18.**

(ITA-sP) Num trapézio retângulo circunscritível, a soma dos

convexo ABCD tal que A dois lados paralelos é igual a 18 cm e a diferença dos dois B C = 70°. Se $x = AC + BD$,

então outros lados é igual a 2 cm. se r é o raio da circunferência

A) $x = 120^\circ$ D) $x = 90^\circ$ inscrita e a é o comprimento do menor lado do trapézio,

b) $x = 110^\circ$ E) $x = 80^\circ$ então a soma $a + r$ (em cm) é igual a

C) $x = 100^\circ$ A) 12 b) 11 C) 10 D) 9 E) 8

Editora Bernoulli **57**

Frente D Módulo 06

SEÇÃO ENEM 04. (Enem–2010) Uma fábrica de tubos acondiciona tubos cilíndricos menores dentro de outros tubos cilíndricos.

01. A figura mostra uma situação em que quatro tubos (Enem–2002) As cidades de Quito e Cingapura

encontram-se próximas à Linha do Equador e em pontos cilíndricos estão acondicionados perfeitamente em um

diametralmente opostos no globo terrestre. Considerando tubo com raio maior.

o raio da Terra igual a 6 370 km, pode-se afirmar que

um avião saindo de Quito, voando em média 800 km/h,

descontando as paradas de escala, chega a Cingapura

em aproximadamente

A) 16 horas. D) 32 horas.

b) 20 horas. E) 36 horas.

C) 25 horas.

02. (Enem–2010) A ideia de usar rolos circulares para deslocar

suponha que você seja o operador da máquina que

objetos pesados provavelmente surgiu com os antigos

produzirá os tubos maiores em que serão colocados, sem

egípcios ao construírem as pirâmides. ajustes ou folgas, quatro tubos cilíndricos internos. se o

raio da base de cada um dos cilindros menores for igual

a 6 cm, a máquina por você operada deverá ser ajustada

para produzir tubos maiores, com raio da base igual a

R A) 12 cm.

b)
12
 $\frac{1}{2}$
cm.

C)
24
 $\frac{1}{2}$
cm.

bOLT, brian. *Atividades*

matemáticas. Ed. Gradiva. D) $6(1$

$+ \frac{1}{2})$ cm.

Representando por r o raio da base dos rolos cilíndricos, E) $12 (1 + 12)$ cm.

em metros, a expressão do deslocamento horizontal y

do bloco de pedra em função de r , após o rolo ter dado

uma volta completa sem deslizar,
é GABARITO A) $y = R$ D) $y = 2pR$

b) $y = 2R$ E) $y = 4pR$ **Fixação**

C) $y = pR$

03. 01. C 02. E 03. b 04. E 05. E (Enem–2010) Uma metalúrgica recebeu uma encomenda

para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o

Propostos

formato de um prisma reto com base triangular, cujas

dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura

é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que 01. A 10. D

a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja 02. 4 11. A

tangente às suas faces laterais, conforme mostra a figura.

03. A 12. D

6 cm 8 cm 04. b 13. b

05. C 14. E

06. b 15. D

07. b 16. A

08. C 17. C

10 cm 09. A 18. C

O raio da perfuração da peça é igual a **Seção Enem**

A) 1 cm. D) 4 cm.

b) 2 cm. E) 5 cm. 01. C 02. E 03. b 04. D

C) 3 cm.

58 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Posições relativas e distância 09 E
de ponto a reta

POSIÇÕES RELATIVAS DE Ou seja:

DUAS RETAS $- a a a b c c b c_1 = -_2 \Rightarrow _1 = _1$ e
 $-_1 \neq -_2 \Rightarrow _1 \neq _1$ b b a b b b b c_{1 2 2 2 1 2 2 2}

Duas retas r e s de um plano podem ser: E, reunindo as duas condições, temos:

• $\left\{ \begin{array}{l} a \ b \ c \\ \end{array} \right|$ Distintas $r \cap s = \emptyset$ Paralelas $a_1 \neq a_2$ (r e s paralelas distintas) $\left\{ \begin{array}{l} a \ b \ c \\ \end{array} \right|$ Coincidentes $r \cap s = \Rightarrow$
 $\equiv s \ r \ r \ s \ \left| \right|_{2 \ 2 \ 2}$

• Concorrentes $r \cap s = \{P\}$

ii) se $m = m$ e $n = n$, as retas r e s são paralelas $r \parallel s$

Consideremos, então, no plano cartesiano, duas retas coincidentes.

(r) $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ e (s) $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$, tais que $a_1 \neq a_2$ ou $b_1 \neq b_2$

y

nem r nem s sejam paralelas aos eixos coordenados, isto é,

$a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$.

$r \equiv s$

suas equações na forma reduzida são:

• $a_1 \neq 0$ (r) $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{a_1 x + c_1}{b_1} = -\frac{a_1}{b_1} x - \frac{c_1}{b_1}$

• $a_2 \neq 0$ (s) $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{a_2 x + c_2}{b_2} = -\frac{a_2}{b_2} x - \frac{c_2}{b_2}$ Ou seja:

Na forma reduzida $y = mx + n$, **m** é o coeficiente angular,

e n é o coeficiente linear da reta. a a b c c b c - 1 = - 2 ⇒ 1 = 1 e - 1 = - 2 ⇒ 1 = 1 b b a b b b b c | a 1 2 2 2 1 2 2 2 | m 1 1 = - a c b E, reunindo as duas condições, temos: 1 | (r) y = - 1 x - ⇒ 1 { b b c 1 1 | a b c n = - 1 | 1 1 b = 1 = 1 (r e s paralelas coincidentes) | 1 a b c 2 2 2

(s) $y = a \mid a_2 \mid m_2 = -$ **iii)** se $m \subset b_r \neq m$, as retas r e s são concorrentes. $s - 2_2 \mid x - \Rightarrow_2 \{ b \mid b \subset 2_2 \mid y \mid n = -_2 \mid 2 \mid b \mid r \mid s \mid 2$

Portanto:

i) se $m = m$ e $n \neq n$, as retas r e s são paralelas distintas. $r \parallel s$ e $r \neq s$

P

 y

r

$$s r // s O x$$
 n_r

n Ou seja:

0 - a a a b₁ ≠ -₂ ⇒₁ ≠₁ (r e s
concorrentes) x b b a b_{1 2 2 2}

Frente E Módulo 09

Em resumo: y mediatriz

$a \cdot b \cdot c_1 = 1 \neq 1 \Leftrightarrow$ (paralelas distintas) $B \neq a \cdot b \cdot c_{222}$

M

$a \cdot b \cdot c_1 \cdot 5A = 1 = 1 \Leftrightarrow$ (paralelas coincidentes) $a \cdot b \cdot c_{222}$

$a \cdot b_1 \neq 1 \Leftrightarrow$ (concorrentes) $a \cdot b_{22}$

O 2 6 x

ObsERvAçÕEs

i) se r é paralela a um dos eixos coordenados, sendo x e y as coordenadas do ponto médio M , temos: M o problema da posição relativa depende da reta s .

ii) 2 6 | se r e s são concorrentes no ponto P , obtêm-se as x $4_M = + = 2$ || coordenadas de P resolvendo o sistema formado $\} \Rightarrow M(4, 6)$ 5 7 pelas equações de r e s . | y $6_M = + = 2$ | **Exemplo** 7 5 - 1 Coeficiente angular de sejam r : $3x + 4y - 5 = 0$ e s : $6x$

$$+ by + c = 0. \text{ AB : } m = m_{Ab} = \frac{6}{2} = 3$$

Então, $r \perp s$ sendo m o coeficiente angular da mediatriz, deve-se ter $m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow b = 8$ e $c = -10$; $m_r = 3 \Rightarrow m_s = -\frac{1}{3}$, se: $b = 8$ e $c \neq -10$; $m_s = -\frac{1}{3} \Rightarrow m_r = 3$, se: $b \neq 8$ e $c \in \mathbb{R}$. Portanto, a equação da mediatriz é:

$$y - 6 = -\frac{1}{3}(x - 4) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{20}{3}$$

RETAS PERPENDICULARES

Duas retas r e s são perpendiculares uma à outra se,

DISTÂNCIA DE PONTO A RETA

e somente se, são concorrentes e formam um ângulo reto. A distância de um ponto P a uma reta r é a distância PQ ,

em que Q é a projeção ortogonal de P sobre a reta r .

r

Q

Teorema

No plano cartesiano, duas retas r e s de coeficientes

Teorema

angulares m e m são perpendiculares entre si se, e somente se, $m_1 \cdot m_2 = -1$. No plano cartesiano, a distância d do ponto $P(x_0, y_0)$ se, $m_1 \cdot m_2 = -1$, à reta r , de equação $ax + by + c = 0$, é dada pela expressão:



$$r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \quad m_1 = \frac{-a_1}{b_1} \Leftrightarrow \frac{-a_1}{b_1} \cdot \frac{-a_2}{b_2} = -1$$
$$\Rightarrow \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} = -1 \Rightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$$
$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Observação



Observação



se uma das retas é paralela a um dos eixos coordenados,

então a reta perpendicular a ela é paralela ao outro eixo. A fórmula da distância continua válida se P

pertence a r

coordenado. ($d = 0$), ou, ainda, se $b = 0$, caso em que r é perpendicular

ao
eixo
 x .

Exemplo

Dar a equação da mediatriz do segmento de extremos nos **Exemplo**

pontos $A(2, 5)$ e $B(6, 7)$. 3 sejam $P(2, -1)$ e $r: y = -x + 1 \Rightarrow 3x + 4y - 4 = 0$ 4 **Resolução:**

A mediatriz é perpendicular ao segmento AB .
A mediatriz r passa pelo ponto médio M de AB .
Então: $d(P, r) = d(P, M)$
 $d(P, r) = \frac{|3(2) + 4(-1) - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|6 - 4 - 4|}{5} = \frac{2}{5}$
 $d(P, M) = \sqrt{(2 - 4)^2 + (-1 - 6)^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$

60 Coleção Estudo

Posições relativas e distância de ponto
a reta

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO 02. (FUvEsT-sP)

As retas r e s são perpendiculares e interceptam-se no ponto $(2, 4)$. A reta s passa pelo ponto $(0, 5)$. Uma equação da reta r é

equações $2x - my + 1 = 0$ e $nx + 3y + 5 = 0$ sejam A) $2y + x = 10$

paralelas, é

$$b) y = x + 2$$

$$A) = m^2 m^3 C) =$$

$$E) mn = 6 C) 2y - x = 6$$

$$n^3 n^2$$

$$D)$$

$$2x$$

$$+$$

$$y$$

$$=$$

$$8$$

$$b) = -m^3 D) mn = -6 E) y = 2x$$

$$n^2$$

02. (UFMG) seja a reta r de equação $2x - 3y - 5 = 0$. **03.** (UFPE) Considere o triângulo de vértices $A(1, 1)$, $b(3, 2)$

A equação da reta s , paralela a r , que contém $P(1, -2)$, é e $C(2, 3)$. A equação da reta que contém a altura desse

A) $2x - 3y - 1 = 0$ D) $3x + 2y + 1 = 0$ triângulo relativa ao lado AC é dada por

$$b) 2x - 3y - 8 = 0 E) 2x + 3y + 4 = 0 A) x - 2y = 7$$

$$C) 3x - 2y - 7 = 0 b) 2x + 2y = -7$$

03. C) $2y - x = 7$ (UFMG) A reta determinada pelos pontos $P(a, 0)$ e $Q(0, 2)$

$$D)$$

$$x$$

$$\begin{aligned} &+ \\ &2y \\ &= \\ &7 \end{aligned}$$

é perpendicular à reta $3x - 2y - 4 = 0$. A abscissa do ponto **P** é E) $x + 2y = -7$

A) 3 b) C) D) – E) –3 **04.** 3 4 4

(UFMG) A reta **r** passa pelo ponto (16, 11) e não

2 3 3

04. intercepta a reta de equação $y = -5$. Considerando-se

(UFMG) As retas perpendiculares à reta de equação 2

$3x + 4y - 9 = 0$ que distam 4 unidades da origem são os seguintes pontos, o **úNiCo** que pertence à reta **r** é

A) $4x - 3y = 5$ e $4x - 3y = -5$ A) (7, 6)

b) $4x - 3y = 20$ e $4x - 3y = -20$ (13) b) | 7, | C) $4x - 3y = 4$ e $4x - 3y = -4$ (2) **MATEMÁTICA**

D) $3x - 4y = 10$ e $3x + 4y = -10$ C) $(7, 7)$

05. E) $4x - 3y = 10$ e $4x - 3y = -10$ (15 \ D) | 7 , | 2)

(PUC-sP) sejam **a**, **B**, **C** e **D** vértices consecutivos de um

quadrado, tais que $A = (1, 3)$ e B e D pertencem à
 reta **05.** (UFTM-MG-2010) A figura apresenta uma circunferência

de equação $x - y - 4 = 0$. A área desse quadrado, em

unidades de superfície, é igual a de centro $\mathbf{o}$ e um diâmetro AB no plano de coordenadas

A) $36\ ^{12}\text{C}$ C) $32\ ^{12}\text{C}$ E) $24\ ^{12}\text{O}$ cartesianas. As coordenadas de **a** e **B** são dadas na figura.

sendo $\angle C$ um ângulo reto, a reta que contém o diâmetro

b) 36 D) 32

que passa pelo ponto C pode ser expressa pela equação

EXERCÍCIOS PROPOSTOS_y

C

01. B(2, 6) (vUNEsP) sabendo que o $\triangle ABC$ é um triângulo retângulo ($\angle B = 90^\circ$), as coordenadas do vértice C são O

y

A(10, 0)

5 A O x

B

3

1

$$2x - y = 10$$

7 2

-2

C

$$1) 2x - y = 12$$

A) 5, -2 D) 4, -2

2

C)

4x

-

3y

=

15

1

b) 3, -2 E) N.d.a D) $5x - 4y = 18$

Frente E Módulo 09**06.** (Mackenzie-SP-2009) No sistema cartesiano ortogonal, **13.**

(Mackenzie-SP) Conhecidas as equações das retas

a reta $3x + 2y - 6 = 0$ intercepta a curva $y = \cos x$, $r: mx + y - 3 = 0$ e $s: 3x + y + k = 0$, podemos afirmar

conforme figura. A distância do ponto **P** à reta dada é que **r** e **s** são retas

y A) paralelas, se $m = 3$ e $k = -3$.

b) coincidentes, se $m = 3$ e $k \neq -3$.

P C) concorrentes, se $m \neq 3$, $k \in \square$.

D) concorrentes, se $k = -3$, $m \in \square$.

1 E) paralelas, se $m = 3$, $k \in \square$.

O x

-1

**SEÇÃO
ENEM**

A) 3π B) $3\pi + 2$ C) 3π D) **01.** Considere uma cidade em que

as ruas são representadas

2 13 13 13 por retas e as casas, por pontos. Num mapa cartesiano

b) 3 dessa cidade, com medidas em km, a padaria Pannetutti $\pi - 2$ 3 $\pi - 4$ D) se localiza no ponto $P(-5, 0)$ e o açougue Quasar se 13 2 13

localiza no ponto $Q(-1, -3)$. Uma pessoa que estiver

07. na origem desse mapa e quiser se dirigir à Rua Pedro

(UCsal-bA) Considere o triângulo de vértices $A(0, 0)$,

Quintão, na qual se localizam a padaria e o açougue, terá

$B(1, 4)$ e $C(4, 1)$. sua altura em relação à base BC mede

de caminhar uma distância de, no mínimo,

A) 2 5 2 A) 2 km. D) 3,5 km. $^1 2$ b) C) 4 D) 4 $^1 2$ E) 5 $^1 2$ 2 b) 2,5 km. E) 4 km.

08. C) 3 km. (UFMG) A distância entre as retas de equações

$$y = ^1 3x \text{ e } y = ^1 3x + 2 \text{ é}$$

3 **02.** Num sistema cartesiano, um trem segue uma trajetória

A) $^1 3$ b) $2^1 3$ C) D) 1 E) 2 retilínea dada pela reta $2x + 3y - 6 = 0$. A menor distância 2

entre uma cidade localizada no ponto $P(3, ^1 13)$ e o trem é

09. (FUvEsT-sP) são dados os pontos $A(1, 1)$ e $B(9, 3)$. A) 1 b) 2 C) 3 D) 4 E) 5

A mediatriz do segmento AB encontra o eixo dos y no

ponto de ordenada igual a

A) 20 b) 21 C) 22 D) 23 E) 24 **GABARITO**

10. (UFRGS) As retas paralelas $y = ax + 2$ e $y = (5 + 2b)x - 1$

Fixação

são perpendiculares à reta $y = x + 3$, com $a \in 2 \square$ e

b 01. D 02. b 03. A 04. b 05. b

$b \in \square^*$. O valor de $a + b$ é

A) -2 b) -1 C) 0 D) 1 E) 2 **Propostos**

11. 01. C 08. D (Mackenzie-SP) A distância da reta determinada pelos pontos $A(1, 4)$ e $B(5, 2)$ à origem é 02. E 09. C

A) 9 b) 5 C) 9 03. D 10. b 81 9 5 D) E) 5 5 5 04. b 11. E

05. C 12. A

12. (FUVEST-SP) Os pontos $M(2, 2)$, $N(-4, 0)$ e $P(-2, 4)$ são, 06. E 13. C respectivamente, os pontos médios dos lados AB , BC e

CA do triângulo ABC . A reta mediatriz do segmento 07. b AB

tem a equação **Seção Enem**

A) $x + 2y - 6 = 0$ D) $2x + y - 6 = 0$

b) $x - 2y + 2 = 0$ E) $-x + 2y + 6 = 0$ 01. C 02. C

C) $2x - 2y - 2 = 0$

62 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Áreas e teoria angular 10 E

ÁREA DE UM TRIÂNGULO ÂNGULO AGUDO ENTRE DUAS

A área s de um triângulo de vértices $A(x, y)$, $B(x_1, y_1)$ e $C(x_2, y_2)$ é dada por:

se duas retas r e s são concorrentes e não perpendiculares, s é dada por:

elas determinam dois ângulos agudos α opostos pelo vértice

α e dois ângulos obtusos β opostos pelo vértice, tais que

$$s = |D|, \text{ em que } D = x_1 y_2 - x_2 y_1 + a + b = 180^\circ \text{ e } \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta.$$

Observações a a

i) se $D = 0$, então os pontos **a**, **B** e **C** são colineares.

b

ii) Para se calcular a área de um polígono, podemos

dividi-lo em triângulos e calcular a soma das áreas de **Teorema**

cada um deles. sejam **(r)** $y = m x + n$ e **(s)** $y = m x + n$ duas retas

$r \perp s$

Exemplo concorrentes e não perpendiculares ($m \cdot m - 1$). $r \cdot s \neq$

O ângulo agudo ϕ entre elas é tal que:

Calcular a área do quadrilátero de vértices $M(1, 1)$,



$N(4, 2)$, $P(3, 5)$ e $Q(1, 4)$. $m - m_r \tan \phi = \frac{1}{s} + m m_r$

Resolução:

Observando-se o esboço a seguir, obtemos a área do

Caso particular

quadrilátero somando as áreas dos triângulos MNP e

PQM. sejam $(r) y = m x + n$, $m \neq 0$, e $(s) x = k$. $r \perp s \Leftrightarrow$

O ângulo agudo ϕ entre elas é tal que:

y



$$\tan \phi = \left| \frac{m - m_r}{1 + m m_r} \right|$$

Exemplo

sejam $r: y = 2x + 7$ e $s: y = -3x$.

$$\tan \phi = \left| \frac{2 - (-3)}{1 + 2(-3)} \right| = \left| \frac{5}{-5} \right| = 1 \Rightarrow \phi = 45^\circ$$

1 M POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE

O 1 3 4 x PONTO E RETA

sejam D o determinante dos pontos M , N e P e D
Consideremos, por exemplo, a reta r de equação
reduzida $\frac{MN}{PQ}$

o determinante dos pontos P , Q e M . $y = 2x + 2$, cujo
gráfico é a figura a seguir, e o ponto $A(1, 4)$.

Observe que o ponto a pertence a r , pois $4 = 2 \cdot 1 + 2$.

Assim, temos: $y \in r$

$$1 \ 1 \ 1 \ 4 \ A \ 3 \ 5 \ 1$$

$$D = 4 \ 2 \ 1 = 10 \text{ e } D = 1 \ 4 \ 1 = 6_{MNP \ PQM}$$

$$3 \ 5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1$$

$$\text{Portanto, } s = s + s = |10| + |6| = 8. \quad \begin{matrix} MNPQ & MNP & PQM & O \\ 1 & 1 & & \end{matrix}$$

$$2 \ 1 \times 2$$

Editora Bernoulli **63**

Frente E Módulo 10

Consideremos agora os pontos $b(1, 5)$ e $C(1, 3)$, que
iv) Os pontos que satisfazem a inequação $x < k$, ou seja,

possuem abscissas iguais à de **a**. Como as ordenadas de os pontos de abscissa menor que **k**, estão à esquerda

B e **C** são diferentes da ordenada de **a**, tais pontos não da reta **r**.

pertencem à reta **r**. $y \ r \ y \ r \ B \ 5$

$$4 \ A$$

$$3 \ C$$

$$2$$

Exemplo

$$-1 \leq x \leq 1$$

Assim: Esboçar a região do plano delimitada por:

• sendo $y = 5$, temos $y > y$; e, portanto, o ponto B_b
 $\{ \mid x y - \geq 0 \Rightarrow y \leq x \mid () \}$ está acima de $a. x x$
 $\{ \mid - 2 0 \geq \Rightarrow \geq 2 () \mid$

• sendo $y = 3$, temos $y < y$; e, portanto, o ponto C_c
 C_A **Resolução:** está abaixo de a .

Portanto, se $y = mx + n$ é a equação reduzida de uma (II)

reta r , então temos:

i) Os pontos que satisfazem a inequação $y > mx + n$

estão acima da reta r .

(I)

y

O 2 x

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFMG–2006) Neste plano cartesiano, está representado

o
quadrilátero
AbCD.

O x

C

ii) Os pontos que satisfazem a inequação $y < mx + n$

estão abaixo da reta **r**.

D

y

r

A B x

sabe-se
que

i) A(1, 0), C(11, 11) e E(3, 7).

O **ii)** o ponto **B** está no eixo **x** e o ponto **E**, no lado **CD**.

iii) os lados **AD** e **BC** são paralelos ao eixo **y**. Então, é **Correto** afirmar que a área do quadrilátero

AbCD
é

se a reta r é perpendicular ao eixo x e sua equação é

A) 87,5 b) 82,5 C) 85 D) 86

$x = k$, de maneira análoga, concluímos que:

iii) 02. (UFJF-MG-2008) Considere o triângulo limitado pelas Os pontos que satisfazem a inequação $x > k$, ou seja, retas $y = x$, $y = -x + 2$ e $y = ax$, com $a > 1$. O valor os pontos de abscissa maior que k , estão à direita

da reta r . 2 de a , de forma que a área desse triângulo seja , é $y r^2$

A) $2^{1/2} + 3$ C) $1/2 + 1$ E) $1/2$ b) $3^{1/2} + 2$ D) $1/2 - 1$

03. (UFMG) O ângulo agudo formado pelas retas de equações

$x = 0$ e $1/3x + y - 1 = 0$ mede A) 15° C) 30° E) 45°

O x b) $22^\circ 30'$ D) $37^\circ 30'$

64 Coleção Estudo

Áreas e teoria angular

04. x (Cesgranrio) As retas $y = -3x + 3$ e $y = -x + 2$ são **03.** (UFF-RJ) O elenco de um filme publicitário é composto

2

de pessoas com cabelos louros ou olhos verdes. sabe-se

mostradas na figura. A área da região hachurada é

que esse elenco tem, no máximo, vinte pessoas entre y as quais, pelo menos, doze possuem cabelos louros e, no máximo, cinco possuem olhos verdes. No gráfico a seguir, pretende-se marcar um ponto $P(L, v)$, em que L representa o número de pessoas do elenco que têm cabelos louros e V o número de pessoas do elenco que O x têm olhos verdes.

y

A) 2,9 b) 3,0 C) 3,1 D) 3,2 E) 4,0

20

05. (FUVEST-SP) Na figura a seguir, **a** é um ponto do plano cartesiano, com coordenadas (x, y) . sabendo que **a** está localizado abaixo da reta **r** e acima da reta **s**, tem-se

y R_1

5 R_2

s R_3 R_4 R_5

-2 -1 1 0 12 20 x

O 1 2 O ponto **P** deverá ser marcado na região indicada por x

-1 A) R_1 b) R_2 C) R_3 D) R_4 E) R_5

04. (PUC-Campinas-SP) A parábola de equação $y = x^2 - 6$ tem

X X vértice **M** e corta o eixo x nos pontos **a** e **B**. Qual a área do

A) $y < e$ y $< -x + 1$ D) $-x + 1 < y <$

2 2 triângulo AbM ?

b) $y < x$ x A) 1 D) $6^1 6$ ou $y > -x + 1$ E) $y < -x + 1$ 2 2
 b) 6 E) $12^1 6$

C) C) x

$$y < y \text{ e } y > -x + 1 \quad 1^6$$

2 MATEMÁTICA

05. (UFRGs) Os pontos médios dos lados do quadrado ABCD,

EXERCÍCIOS PROPOSTOS com A(1, 2) e
 b(4, 2), são vértices do quadrado de área igual a

3

01. A) 9 D) (PUC-SP) O conjunto dos pontos (x, y) do plano
 cartesiano 2

que satisfazem a inequação $(x + y)(x - y) \leq 0$ é a
 parte 9 3

hachurada de qual das seguintes figuras? b) E) 2 4

A) y C) y E) y

C)
 3

06. (Mackenzie-SP-2007) Os gráficos de $y = x + 2$ e $x + y = 6$

x x x

definem, com os eixos, no primeiro quadrante, um

quadrilátero de área

A) 12 b) 16 C) 10 D) 8 E) 14

b) y D) y

07. (CEFET-MG-2010) Num supermercado em construção, serão instalados quatro terminais para consulta de preços.

Considerando-se um sistema de coordenadas no plano do chão, os locais onde serão colocados os terminais coincidem com os pontos de interseção das retas de equações

$$y = 1, y = 2, y = x \text{ e } y = x - 3, \text{ tomadas duas a duas.}$$

02. (PUC Minas) Considere a região do plano cartesiano O polígono formado por esses pontos possui área igual a

formada pelos pontos cujas coordenadas satisfazem ao A) 2 b) 3 C) 4 D) 5 E) 6

sistema | **08.** (vUNESP) A área do triângulo formado pelas interseções $\{ \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y \leq 2x + 2 \end{cases}$

| das retas $x + y - 6 = 0$, $x = 1$ e $y = 1$ é igual a $y \leq 2x + 2$ $y \geq x$

|

A) 2 b) 4 C) 8 D) 16

Tomando-se o metro como unidade de medida nos

2 m de altura e área igual a a metros quadrados. colineares. O valor de x é igual a Então, o valor de a é eixos coordenados, essa

região é um trapézio com **09.** (PUC Rio) Os pontos A(3, 1), b(4, -2) e C(x, 7) são

A) 1 b) 2 C) 5 D) 6 E) 7

A) 3 b) 4 C) 5 D) 6

Frente E Módulo 10

10. Chamando de x o horário de chegada de José e de y o (FUvEsT-sP) A reta de equação $2x + 12y - 3 = 0$,

em relação a um sistema cartesiano ortogonal, forma horário de chegada de Antônio, e representando os pares

com os eixos do sistema um triângulo cuja área é (x, y) em um sistema de eixos cartesianos, a região OPQR

A) 1 1 1 3 3 indicada anteriormente corresponde ao conjunto de todas as b) C) D) E) 3 4 15 8 16 possibilidades para o par (x, y) .

11. (UFMG) A área do triângulo limitado pelas retas

$4x + 5y - 20 = 0$, $y = 0$ e $x = 0$ é **01.** segundo o combinado, para que José e Antônio viagem

12. A) 4 b) 5 C) 10 D) 16 E) 20 1 1 juntos, é necessário que $y - x \leq$ ou que $x - y \leq$. 2 2

(FGV-MG-2008) As interseções de $y = x$, $y = -x$ e $y = 6$

são vértices de um triângulo de área 1 $y = x +$ Antônio $y = x + 2$ A) 36 b) 24 $\frac{1}{2}$ C) 24 D) 12 $\frac{1}{2}$ E) 12 1

13. (UFMG) Observe a figura. 1 I

$$y^2 + 12y = x -$$

11 2 III

C

IV

B

O 1 1 José

A 2

1 O 5 x

2 De acordo com o gráfico e nas condições combinadas,
as chances de José e Antônio viajarem juntos são de

Nessa figura, a reta AC intercepta o eixo das abscissas

no ponto $(1, \quad)$, A) 0%. b) 25%. C) 50%. D) 75%. E) 100%.

$|| - 0 ||$, e a área do triângulo de
vértices $2 \quad)$ **02.** Num mapa localizado sobre
um sistema cartesiano,

a, B e C é 10. Então, a ordenada do ponto B é 3 cidades se localizam
nos pontos A(2, 3), b(-5, 0) e

A) 20 31 C(4, -1). A área da região triangular determinada pelas b)
C) 4 D) 5 E) 6 11 11 cidades é

A) 15 u.a. C) 19 u.a. E) 23 u.a.

SEÇÃO ENEM b) 17 u.a. D) 21 u.a.

(Enem-1999)

instrução: Texto para a questão **01**.

GABARITO

**José e Antônio viajarão em seus
carros com as respectivas Fixação**

famílias para a cidade de serra branca. Com a intenção de

seguir viagem juntos, combinam um encontro no marco inicial

01. C 02. A 03. C 04. A 05. E

da rodovia, onde chegarão, de modo independente, entre

meio-dia e 1 hora da tarde.

Entretanto, como não querem ficar

Propostos muito tempo esperando um pelo outro, combinam
que o primeiro

que chegar ao marco inicial esperará pelo outro, no máximo, 01. E 08.

C meia hora; após esse tempo, seguirá viagem sozinho. 02. D 09. A

03. D 10. E

Chegada de

Antônio 04. D 11. C

1 05. b 12. A P Q

(13h)

06. E 13. D

07.

O Seção Enem_R

(12h) 0 1 Chegada 01. D 02. b (13h) de José

66 Coleção Estudo

MATEMÁTICA MÓDULO FRENTE

Circunferência 11 E

INTRODUÇÃO Exemplos

1º) Dar a equação reduzida da circunferência de centro **C**

Uma circunferência λ é o conjunto de todos os pontos e raio **r** nos seguintes casos:

do plano cuja distância a um ponto fixo **C** é uma constante

$$\text{A) } C(1, 2) \text{ e } r = 4$$

positiva **r**.

$$\text{b) } C(-1, 2) \text{ e } r = 5$$

C: Centro da circunferência;

r: Raio da circunferência. C) $C(0, -3)$ e $r = 13$

Em símbolos: $P \in \lambda \Leftrightarrow PC = r$ D) $C(0, 0)$ e $r = 1$

λ P r **Resolução:**

$$A) (x - 1)_2 + (y - 2)_2 = 16$$

C

$$b) (x + 1)_2 + (y - 2)_2 = 25$$

$$C) x_2 + (y + 3)_2 = 3$$

D)

x_2

+

y_2

=

1

EQUAÇÃO REDUZIDA DA 2º) Dar o
centro **C** e o raio **r** da circunferência nos

CIRCUNFERÊNCIA seguintes casos:

$$A) (x - 3)_2 + (y - 4)_2 = 100$$

Consideremos uma circunferência λ de centro $C(a,$
 $b)$ e raio **r**.

$$b) (x + 3)_2 + (y - 1)_2 = 16$$

Obter uma equação da circunferência λ é encontrar
uma

relação entre as coordenadas **x** e **y** dos pontos do

plano C) $(x + 4)^2 + y^2 = 9$

que pertencem a λ . D) $x^2 + y^2 = 7$

y **Resolução:**

A) C(3, 4) e $r = 10$

λ P(x, y)

r b) C(-3, 1) e $r = 4$

b C) C(-4, 0) e $r = 3$ C

D) C(0, 0) e $r = 17$

O a x ObsERvAção

seja P(x, y) um ponto genérico da circunferência.

Temos: Considerando-se a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$, temos:

$P \in \lambda \Leftrightarrow PC = r$ i) se $k > 0$, então $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$ representa uma

P circunferência de centro $C = (a, b)$ e raio $= \sqrt{k}$. $\in$
 $\lambda \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

P ii) se $k = 0$, então $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$
representa $\in \lambda \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

o ponto $P = (a, b)$, pois $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0 \Rightarrow$

Esta última igualdade é chamada de equação reduzida da $x - a = 0$ e $y - b = 0$.

circunferência de centro (a, b) e raio r .

iii) se $k < 0$, então $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$ representa o



$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

o conjunto vazio, pois a soma dos quadrados de dois números reais não pode ser negativa.

Editora Bernoulli 67

Frente E Módulo 11

EQUAÇÃO NORMAL DA OBSERVAÇÕES

CIRCUNFERÊNCIA Na equação normal da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r , tem-se:

seja a circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r . i) Os coeficientes de x^2 e y^2 são iguais a 1.

y ii) Os coeficientes de x e de y são, respectivamente,

o dobro com os sinais trocados, das coordenadas

r a e b do centro.

b

C iii) Não existe termo da forma kxy , $k \neq 0$.

iv) $a_2 + b_2 - r_2$ é chamado termo independente.

O a x **Exemplo**

sua equação reduzida é: Para que a equação $mx_2 + y_2 + 4x - 6y + nxy - p = 0$

$$(x - a) + (y - b)_2 = r_2$$

$_2$ represente uma circunferência, devemos ter:

Desenvolvendo-se a equação reduzida, temos: $m = 1$
e $n = 0 \Rightarrow x_2 + y_2 + 4x - 6y = p \Rightarrow$

$$x_2 - 2ax + a_2 + y_2 - 2by + b_2 = r_2 \quad x_2 + 4x + 4 + y_2 - 6y + 9 = p + 4 + 9 \Rightarrow$$

$$\text{Logo, obtemos: } (x + 2)_2 + (y - 3)_2 = p + 13 > 0 \\ \Rightarrow p > -13$$



$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

Essa é a equação normal da circunferência de centro

$C(a, b)$ e raio r . **01.** (UFPA) Qual das equações a seguir é a equação de uma

circunferência

se uma circunferência é dada pela sua equação normal,

pode-se determinar seu centro e raio por comparação ou A) $x^2 + y^2 + 1 = 0$ completando-se a soma dos quadrados para obtermos a b) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 4 = 0$

equação reduzida, conforme o exemplo a seguir: c) $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 64$

Exemplo D) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$

Obter o centro e o raio da circunferência E) $x^2 + 2xy + y^2 = 32$

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$. **02.** (UDEsC) Para que a equação $x^2 + y^2 - 4x + 8y + k = 0$

Resolução: represente uma circunferência, devemos ter

Tem-se: A) $k < 20$

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ b) $k > 13$

Reagrupando: C) $k < 12$

$$x_2 - 2x + \dots + y_2 + 4y + \dots = 11 \quad \text{D) } k > 12$$

$$(x_2 - 2x + \dots) + (y_2 + 4y + \dots) = 11$$

Adicionando 1 e 4 aos dois lados da equação para que o **03**. (PUC Minas) A medida do raio da semicircunferência de

1º e o 2º fatores sejam quadrados perfeitos, temos: 1
equação $y = 19 - 4x^2$ é igual a $2(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 11 + 1 + 4$

Fatorando: A) D) 2 5

3 2

$$(x - 1)_2 + (y + 2)_2 = 16 \quad \text{b) 2 E) 3}$$

Essa é a equação reduzida da circunferência. 3 C)
Portanto, a circunferência tem centro $C(1, -2)$ e raio 4. 2

68 Coleção Estudo

Circunferência

04. (FGV-SP) O ponto da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ mais próximo

06. (UFRGs) A equação $x^2 + y^2 + 4x - 6y + m = 0$ representa

do ponto $(5, 5)$ tem coordenadas cuja soma vale um círculo se, e somente se,

A) $2 \leq m < 13$ B) $m > 0$ C) $m > -13$ D) $4 \leq m < 13$ E) $m < 13$

b) $1 \leq m < 13$ E) $3 \leq m < 13$

C) $2 \leq m < 13$

07. (PUC-sP) A reta de equação $y = 2x - 4$ intercepta os

05. (UEL-PR) sejam A(-2, 1) e B(0, -3) as extremidades de eixos coordenados nos pontos a e B. Esses pontos são os

extremos de um diâmetro de uma circunferência λ . A equação de λ é

A) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$ correspondente a λ é

b) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 20$ A) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$

C) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$ b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$

D) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 20$ C) $2x^2 + 4y^2 + 2x + 4y + 5 = 0$

E) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$ D) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$

E) $x^2 + y^2 + 6x + 3y - 4 = 0$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 08. (UFPA) Q

ua la equação da circunferência

de raio 2 que é concêntrica à circunferência

01. (UFPA) Uma circunferência tem centro no ponto C(2, -1) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$

e raio igual a $\sqrt{2}$. Qual é a equação dessa circunferência? A) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$

A) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$ b) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$

b) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$ C) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$

$$C) (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 12 \quad D) (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

$$D) (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 2 \quad E) (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

$$E) (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 12$$

MATEMÁTICA

02. (FGV-sP-2010) Dada a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$, seja **P** seu ponto de ordenada $y = 4$. Dado o ponto **P**(5, 4) e a circunferência de

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 20 = 0, \text{ a equação da}$$

circunferência concêntrica com a circunferência dada e

máxima. A soma das coordenadas de **P** é

que passa por **P** é

$$A) 10 \quad b) 10,5 \quad C) 11 \quad D) 11,5 \quad E) 1$$

$$A) x^2 + y^2 - 2x - 2y - 20 = 0$$

03. (UFRGs) A distância entre o ponto de interseção das retas $x + y - 2x - 2y - 21 = 0$

$$y = 5 \text{ e } 3x + 2y - 1 = 0 \text{ e o centro da circunferência } C) x^2 + y^2 - 2x - 2y - 22 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0 \quad \text{é} \quad D) x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$$

$$A) 15 \quad D) 185 \quad E) x^2 + y^2 - 2x - 2y - 24 = 0$$

$$b) 129 \quad E) 189$$

C) 140 **10.** (FUvEsT-sP) O segmento AB é o diâmetro da circunferência

04. de equação $x^2 + y^2 = 10y$. se **a** é o ponto (3, 1), então

(Fatec-sP) sejam **o** a origem do sistema de eixos

B é
o

cartesianos e **a** o centro da circunferência de equação

$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$. A equação da reta que passa por A) $(-3, 9)$

pelos pontos **a** e **o** é b) $(3, 9)$

C)
(0,
10)

A) $y = 2x + 1$ D) $y = 2x$

D)
(-
3,
1)

b) $y = 2x - 1$ E) $y = x$

C) $y = x$ E) $(1, 3)$

2 11. (FJP-MG-2010) Considere a circunferência de centro

05. (Unifor-CE) seja a circunferência λ , de centro no ponto $C(3, 3)$ e tangente aos eixos coordenados. A soma das

$(1, -2)$. se o ponto $A(7, -10)$ pertence a λ , o seu raio é coordenadas do ponto dessa circunferência mais afastado

A) $5\sqrt{2}$ D) 10 da origem $(0, 0)$ é

b) 8 E) $10\sqrt{2}$ A) 9 C) $4 + 6\sqrt{2}$

C) $8\sqrt{2}$ b) $6 + 3\sqrt{2}$ D) $4 + 2\sqrt{3}$

12. (Unimontes-MG–2010) Quantos pontos têm em **02.** Num sistema cartesiano, todas as cidades de um estado

comum a parábola $3x^2 - y + 1 = 0$ e a circunferência que distam 10 km da capital satisfazem à equação

$x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$? $x^2 + y^2 - 20x + 40y + 400 = 0$. Então, a capital do estado

A) 2 pontos está localizada no ponto

b) 1 ponto A) (10, 20)

C) 4 pontos b) (-20, 40)

D) 3 pontos C) (-10, -20)

D)
(20,
–
40)

13. (PUC Minas) O raio da circunferência de equação

E)
(10,
–
20)

$x^2 + y^2 - x + y + c = 0$ mede unidades de comprimento. 3

2

Nessas condições, o valor da constante c é igual a

7 GABARITO

A) –

4

b) – 3 **Fixação**

01.
D

C) -1

02.
A

1

D)

2 03. C

E) 1 04. b

05.
A

SEÇÃO ENEM Propostos

01. Um holofote circular projeta no chão uma figura dada pela 01. b

inequação $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 23 \leq 0$. sabe-se que seu

coeficiente de ampliação é 3, isto é, sua projeção possui 02. A

uma área 3 vezes maior que sua superfície circular. O raio 03. E

do círculo de sua superfície vale

04.
D05.
D

06.

E

07.
b

Superfície circular 08. C

09.
D

10.
A

11.
b

12.
D

Projeção

13.
A

A) 3

b) 2 3 **Seção Enem**

C) 3 3

01.
b

D) 4 3

02.
E

E) 5 3

à 12 E circunferência

POSIÇÕES RELATIVAS Assim, sendo $Ax + by + C = 0$ a equação de t e $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ a equação de λ , tem-se o sistema:

ENTRE UMA RETA E UMA CIRCUNFERÊNCIA

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 & \text{(I)} \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Considere, num plano, uma reta t e uma circunferência λ de (I) em (II), chegando-se a uma equação do 2º grau de uma. Esse sistema pode ser resolvido facilmente pela substituição

de centro C e raio r . seja d a distância de C até a reta t . incógnita. sendo D o discriminante dessa equação, temos que: Em relação a λ , a reta t ocupa uma das três posições:

1ª) t é tangente a λ se, e somente se, $d = r$. distintas (t é secante a λ) se $D > 0$, então a equação possui duas raízes reais e

λ).

t ii) se $D = 0$, então a equação possui duas raízes reais e

iguais (t é tangente a λ).

λ P iii) se $D < 0$, então a equação não possui raízes reais

d (t é exterior a λ).

$C \cap t = \emptyset$

2ª) $\Delta < 0$ t é secante a λ

λ se, e somente se, $d < r$.

$t \cap C = 2$

$A > 0$ Δ

λ

d

C B Exemplos

1º) Qual é a posição relativa entre a reta (t) $y = x + 1$

e a circunferência (λ) $x^2 + y^2 = 2$?

3ª) **Resolução:** t é exterior a λ se, e somente se, $d > r$.

t 1º modo

Comparar o raio r com a distância d do centro da circunferência até a reta.

$$\lambda d(\lambda) x_2 + y_2 = 2 \Rightarrow C(0, 0) \text{ e } r = 12$$

$$C(t) x - y + 1 = 0$$

Logo:

obtemos os pontos de interseção resolvendo o sistema
 Caso a reta t seja tangente ou secante à circunferência
 $\lambda, d C t 0 0 1 - + 1 2 (,) = \Rightarrow d C t (,) = \Rightarrow d C t (,) = 2 () 1_2 + - () 1_2 2$

formado pelas equações de t e λ . Assim, $d < r \Rightarrow t$ é secante a λ .

Editora Bernoulli 71

Frente E Módulo 12

2º modo ii) P é interior a λ se, e somente se, $PC < r$.

Resolver o sistema formado pelas equações de t e λ . y

λ

$$\{ | y x = + 1 () I P \} x_2 b + y_2 = 2 () II \cup C$$

substituindo (I) em (II), temos:

$$x_2 + (x + 1)_2 = 2 \Rightarrow 2x_2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow 0 \text{ a } x$$

$$D = (2)_2 - 4 \cdot (2) \cdot (-1) = 12 \Rightarrow D > 0_2 \text{ Logo, } PC < r_2 \Leftrightarrow (x - a)_2 + (y - b)_2 < r_2 \text{ } \Rightarrow \text{Portanto, } D > 0 \Rightarrow t \text{ é secante a } \lambda.$$

2º) $(x - a)_2 + (y - b)_2 - r_2 < 0 \text{ } \Rightarrow$ Dar a equação da circunferência do centro $C(1, 2)$,

tangente à reta $(t) \ 3x + 4y + 4 = 0$.

iii) P é exterior a λ se, e somente se, $PC > r$.

Resolução:

O raio da circunferência é igual à distância do centro $y \ P \ \lambda$ até a reta.

$$r = d(C, t) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$3 + 4_2 5$$

$$_2 =$$

Portanto, a equação da circunferência é:

$$(x - 1)_2 + (y - 2)_2 = 9$$

$$\text{Logo, } PC_2 > r_2 \Leftrightarrow (x - a)_2 + (y - b)_2 > r_2 \Leftrightarrow$$

POSIÇÕES RELATIVAS $(x - a)_2 + (y - b)_2 - r_2 > 0$

ENTRE UM PONTO E UMA

CIRCUNFERÊNCIA Exemplos

1º) Dada a circunferência $(\lambda) x_2^2 + y_2^2 + 2x - 2y - 7 = 0$,

Consideremos, num plano cartesiano, uma circunferência qual é a posição, em relação a λ , do ponto A(3, 1)?

λ : $(x - a)_2 + (y - b)_2 = r_2$. Em relação a λ , um ponto P(x, y) do plano ocupa uma das três posições:

Resolução:

i) P pertence a λ substituindo-se as coordenadas de a no 1º membro

se, e somente se, $PC = r$.

da equação de λ , tem-se:

$$3^2 + 1^2 + 2.3 - 2.1 - 7 = 7 > 0$$

λ P

Portanto, C é exterior a λ .

b

C

2º) Dada a circunferência $(\lambda) x^2 + y^2 = 1$, qual é a posição,

em relação a λ , do ponto A(0, -1)?

O a x **Resolução:**

Logo, $PC_2 = r_2 \Leftrightarrow (x - a)_2 + (y - b)_2 = r_{200} \Rightarrow$ equação de substituindo as coordenadas de a no 1º membro da

λ , tem-se:

$$\begin{aligned} &0_2 \\ &+ \\ &(- \\ &1)_2 \\ &- \\ &1 \\ &= \\ &0 \end{aligned}$$

$$(x_{20} - a)_2 + (y_0 - b) - r_2 = 0$$

72 Coleção Estudo

Posições relativas à circunferência

LUGARES GEOMÉTRICOS que representa os pontos da circunferência de centro $(4, 3)$ e raio 2 e os pontos exteriores a ela.

DE PONTOS

Considerada uma circunferência λ de centro $C(a, b)$ e raio r ,

i) os pontos que satisfazem a equação λ

2

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0 \quad C$$

são os pontos de λ .

y

$$\lambda \cap \lambda = \emptyset$$

b C₂ $\{ x + y \leq 4 \}$ 2º) Representar,
graficamente: $\{ y \geq 1 \}$

Resolu

O a $x^2 + y^2 \leq 4$ é representada pelos pontos da
circunferência de centro (0, 0) e raio 2 e pelos pontos
ii) os pontos que satisfazem a inequação
interiores a ela.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 < r_2$$

são os pontos interiores a $y \leq \lambda$.

2

$y \leq \lambda$

λ

b C O 2 x **MATEMÁTICA**

O a x

iii) $y \geq 1$ é representada pelos pontos de ordenada
1 e os pontos que satisfazem a inequação

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 > r_2$$

2 pelos pontos de ordenada maior
que 1.

são os pontos exteriores a λ .

y

λ_1

$b \subset C \cap x$

Portanto, o segmento circular a seguir é a representação

O dos pontos que satisfazem a $x^2 + y^2 \leq 4$ e a $y \geq 1$.

Exemplos

2

1º) Representar graficamente: $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 \geq 0$

Resolução:

$$(x^2 - 8x + \dots) + (y^2 - 6y + \dots) \geq -21 \Rightarrow$$

$$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) \geq -21 + 16 + 9 \Rightarrow$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 \geq 4$$

Frente E Módulo 12

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

DUAS CIRCUNFERÊNCIAS 01. (UEL-PR)

seja P um ponto do eixo das ordenadas

pertencente à reta de equação $2x - 3y - 6 = 0$. A equação

Dadas duas circunferências de centros C_1 e C_2 e raios r_1 e r_2 da circunferência de centro em P e tangente ao eixo das

r_1 ($r_1 \geq r_2$), sabemos, da geometria plana, que: r_2 abscissas é

1º caso A) $x^2 + y^2 = 4$

$d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$ circunferências tangentes $\Rightarrow$

b) $x^2 + y^2 + 4x = 0$

exteriormente. 2 C) $x^2 + y^2 + 4y = 0$

2º caso D) $x^2 + y^2 - 4x = 0$

$d(C_1, C_2) = r_1 - r_2 \Rightarrow$ circunferências tangentes

E) $x^2 + y^2 - 4y = 0$ interiormente.

3º caso 02. (FUvEsT-sP) A reta $y = mx$ ($m > 0$) é tangente à

$r_1 - r_2 < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2 =$ circunferências $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ circunferência $(x - 4)^2 + y^2 = 4$. O seno do ângulo que a secantes. reta forma com o eixo x vale

4º caso $d(C_1, C_2) > r_1 + r_2$ circunferências exteriores. $\Rightarrow$

Caso especial b) $d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$

2

$d(C_1, C_2) = 0 \Rightarrow$ circunferências concêntricas. $\Rightarrow$

3

C)

2

Exemplos

03. (UFPR) No sistema de coordenadas cartesianas

1º) $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ e $C_2: x^2 + y^2 - 25 = 0$ são ortogonais, a equação da tangente à circunferência C_1 no ponto $P(3, 4)$, é

λ $C_1: -3x + 4y - 7 = 0$ e $C_2: x^2 + y^2 - 25 = 0$ são ortogonais, a equação da tangente à circunferência C_2 no ponto $P(3, 4)$, é

Resolução: D) $4x + 3y - 24 = 0$

E)

3x

+

4y

-

$$d(C_1, C_2) = |r_1 - r_2| < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$$

(04. (UFRGs) Os raios das circunferências tangentes aos eixos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$ coordenados e que contêm o ponto (1, 2) são

⇒ Circunferências secantes A) 1 e 2

b)
1 e
5

$$2^o) \{C_1(x^2 + y^2 = 1) \text{ e } C_2(x^2 + y^2 = 4) \mid \lambda : (x-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \{r = 1 \mid D_1(x^2 + y^2 = 5)\}$$

$$\lambda : (x-4)^2 + y^2 = 4 \mid E_1(x^2 + y^2 = 5) \Rightarrow$$

$\{r = 2 \mid D_2(x^2 + y^2 = 5)\} = 05.$ (UFOP-MG) A equação da circunferência de centro $P(3, 1)$

e tangente à reta $r: 3x + 4y + 7 = 0$ é

Resolução:

$$A) x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$$

$$d(C_1, C_2) = 3 \Rightarrow d(C_1, C_2) = r_1 + r_2 \quad b) x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$$

$$(3 = 1 + 2) C) x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$$

$$\Rightarrow D) x^2 + y^2 - 6x - 6 = 0$$

Circunferências tangentes

exteriormente E) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$

74 Coleção Estudo

Posições relativas à circunferência

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 06. (UFC–2008)

O número de pontos na interseção dos subconjuntos do plano cartesiano

01. (UFRGs) Considere a circunferência inscrita no triângulo $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -x + y + 1 = 0\}$ e

equilátero, conforme mostra a figura. $c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0\}$ é

y

A)
0

b)
1

C)
2

D)
3

-1 x 0 1

E)
4

A equação da circunferência é

07. (UFJF-MG)
 Considere as circunferências C_1 e C_2 de equações

$$C_1: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \text{ e } C_2: x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0,$$

respectivamente. É **Correto** afirmar que C_1 é tangente ao eixo das abscissas. C_1 e C_2 se interceptam em dois pontos. C_1 e C_2 não se interceptam.

C_1 e C_2 se interceptam em um único ponto.

C_1 e C_2 se interceptam em dois pontos. C_1 e C_2 não se interceptam.

02. 08. (FUVEST-SP) Das regiões hachuradas na sequência, a que (UFPE) Assinale a alternativa que corresponde à equação

de circunferência cujo raio mede 2 e que tangencia os eixos positivos. **MELHOR** representa o conjunto dos pontos (x, y) , do plano

dois semieixos positivos. cartesiano, satisfazendo ao conjunto de desigualdades

$$A) x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$$

$$B) x \geq 0; y \geq 0; x - y + 1 \geq 0; x^2 + y^2 \leq 9, \text{ é}$$

$$C) 5x^2 + 5y^2 - 80x - 80y + 320 = 0$$

$$D) 2x^2 + 2y^2 + 3x - 3y + 7 = 0$$

MATEMÁTICA

E) $x^2 + y^2 = 8$

03. (FUvEsT-sP) Uma reta passa pelo ponto $P(1, 3)$ e é tangente à circunferência de centro $C(1, 1)$ e raio 1 num ponto t . Então, a medida do segmento PT é

A) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{2}$

C) $\sqrt{5}$

O x

04. (PUC-sP) A circunferência com centro na origem e tangente à reta $3x + 4y = 10$ tem equação

E)
y

A) $x^2 + y^2 = 1$

b) $x^2 + y^2 = 2$

O x

C) $x^2 + y^2 = 3$

D) $x^2 + y^2 = 4$ **09.** (UFRN) No sistema de coordenadas cartesianas

E) $x^2 + y^2 = 5$ ortogonais, a equação da tangente à circunferência

05. $x^2 + y^2 = 1$, no ponto $(-1, 0)$, é (UNESP) seja (x, y)

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 16 \text{ e } x^2 + (y - 1)^2 \geq 9\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y = x + 1\}$$

uma região do plano. A área de S é $\frac{1}{2}$

A) $\frac{5}{2}$ D) $\frac{7}{2}$ C) $y = -x + \frac{1}{2}$

b) $\frac{7}{2}$ E) $\frac{7}{2}$ D) $y = -x - \frac{1}{2}$

C) $\frac{5}{2}$ E) $y = 2x + \frac{1}{2}$

Editora Bernoulli **75**

Frente E Módulo 12

10. (FEI-sP) O comprimento da corda que a reta $x + y = 3$ **02.** Um ex-marido foi proibido pela Justiça de se aproximar

determina na circunferência de centro $(2, 1)$ e raio 5 da ex-mulher, devendo manter uma distância fixa mínima é

2 de sua residência, localizada na origem do sistema

A) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{4}{2}$ cartesiano. A região que melhor representa os pontos

b) $\frac{2}{2}$ E) $\frac{5}{2}$ proibidos para o ex-marido se localizar é

C) $\frac{3}{2}$

A) y D) y

11. (UFC-2010) Em um sistema cartesiano de coordenadas,

o valor positivo de b tal que a reta $y = x + b$ é tangente

ao círculo de equação $x^2 + y^2 = 1$ é $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$

A) $\frac{1}{2}$

C) $b) y y E) ^{12} b) 1$

1

D)

2 0 0 x x

E) 3

12. 3

(UFsM-Rs) A reta $y = x$ é tangente a uma circunferência

3

de centro $(2, 0)$. O raio dessa circunferência é C) y

A) 0,5 D) 2

b) 1 E) 3 O x

C) 13

13. (PUCPR) As interseções das retas de equações

$|y| = 3$ e $|x - 2| = 3$ delimitam um quadrado em que

está inscrita uma circunferência
cuja equação é GABARITO A) $x^2 + y^2 = 9$

b) $x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0$ Fixação C)

$$x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$$

D) $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$ 01. C 04. b

E) $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$

02. b 05. b

SEÇÃO ENEM_{03. E}

01. Um emblema de uma bandeira de uma escola de samba é

Propostos

uma figura geométrica definida por $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 \leq 0$

01. E 08. A

quando projetada em um plano cartesiano com x e y

dados em metros. Esse emblema será pintado em duas 02. A 09. A

cores separadas pela reta $y = x$. A região acima da reta 03. A 10. E

será pintada de verde, e a região abaixo será pintada

04. D 11. C

de rosa. Considerando que a escola de samba pretende

confeccionar 100 dessas bandeiras e que uma lata de tinta 05. D 12.

b

cobre 4 m^2 do emblema, determine a quantidade mínima 06. A 13.

C

de latas de tinta rosa a serem utilizadas. Adote $p = 3,14$.

07.
D

A) 225

b) 320 **Seção Enem**

C) 354

D) 450 01. C 02. C

E) 500

76 Coleção Estudo